Mikroekonomia A.4

Mikołaj Czajkowski

Funkcja użyteczności

- Jeśli preferencje są racjonalne i ciągłe – mogą zostać opisane za pomocą funkcji użyteczności
- Funkcja użyteczności to funkcja, która spełnia warunki:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) < U(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{y})$$

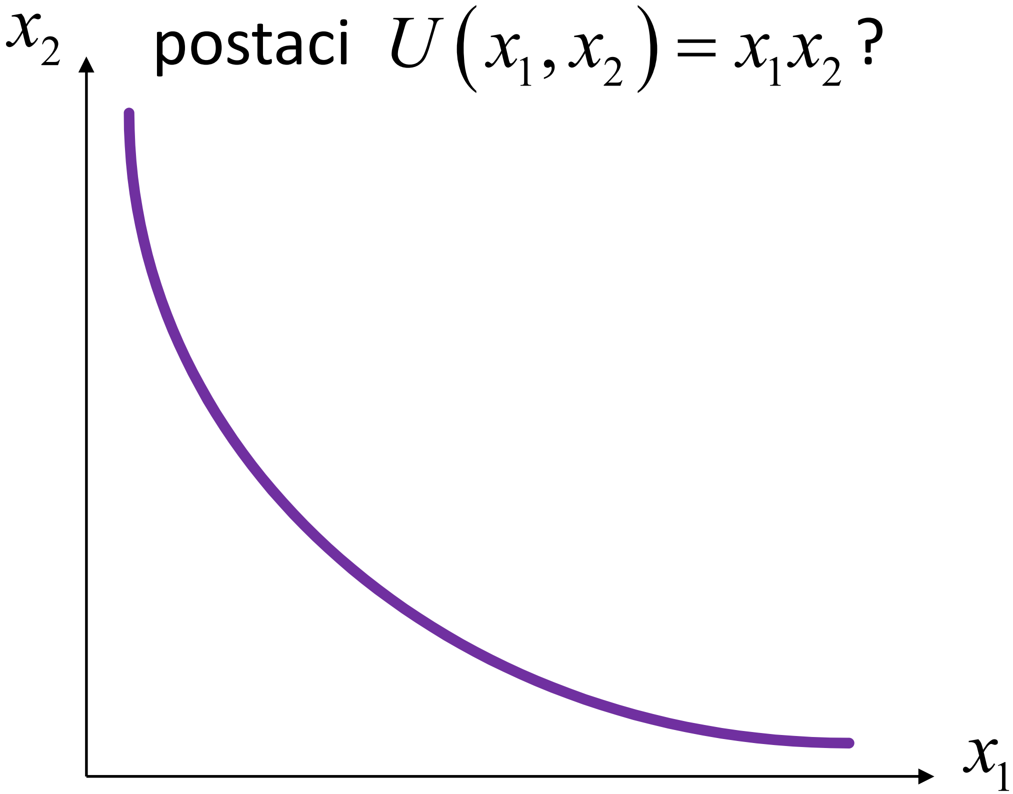
- Funkcja użyteczności jest funkcją porządkową:
  - $U(\mathbf{x}) = 6$ i $U(\mathbf{y}) = 2$ to $\mathbf{x}$ jest ściśle preferowany względem $\mathbf{y}$, ale niekoniecznie trzy razy bardziej
- Wartości funkcji nazywamy poziomami użyteczności

Funkcja użyteczności

- Funkcja użyteczności porządkuje różne koszyki nadając im różne wartości użyteczności
- Każda relacja preferencji może mieć wiele funkcji użyteczności, które będą ją reprezentować
- Każda ściśle rosnąca transformacja funkcji użyteczności jest nową funkcją użyteczności, która reprezentuje te same preferencje
  - Np. załóżmy, że $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ reprezentuje preferencje
  - Wtedy $U(4,1) = 4$, $U(2,3) = 6$, $U(2,2) = 4$
  - Ściśle rosnąca transformacja funkcji użyteczności to np. $U'(x_1, x_2) = \left(U(x_1, x_2)\right)^2 + 10 = (x_1 x_2)^2 + 10$
  - Czy nowa funkcja zachowuje preferencje?

Funkcje użyteczności – przykłady

- Krzywa obojętności – zawiera wszystkie koszyki, które dają tę samą użyteczność
- Jak wyglądają krzywe obojętności funkcji użyteczności o postaci $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$?

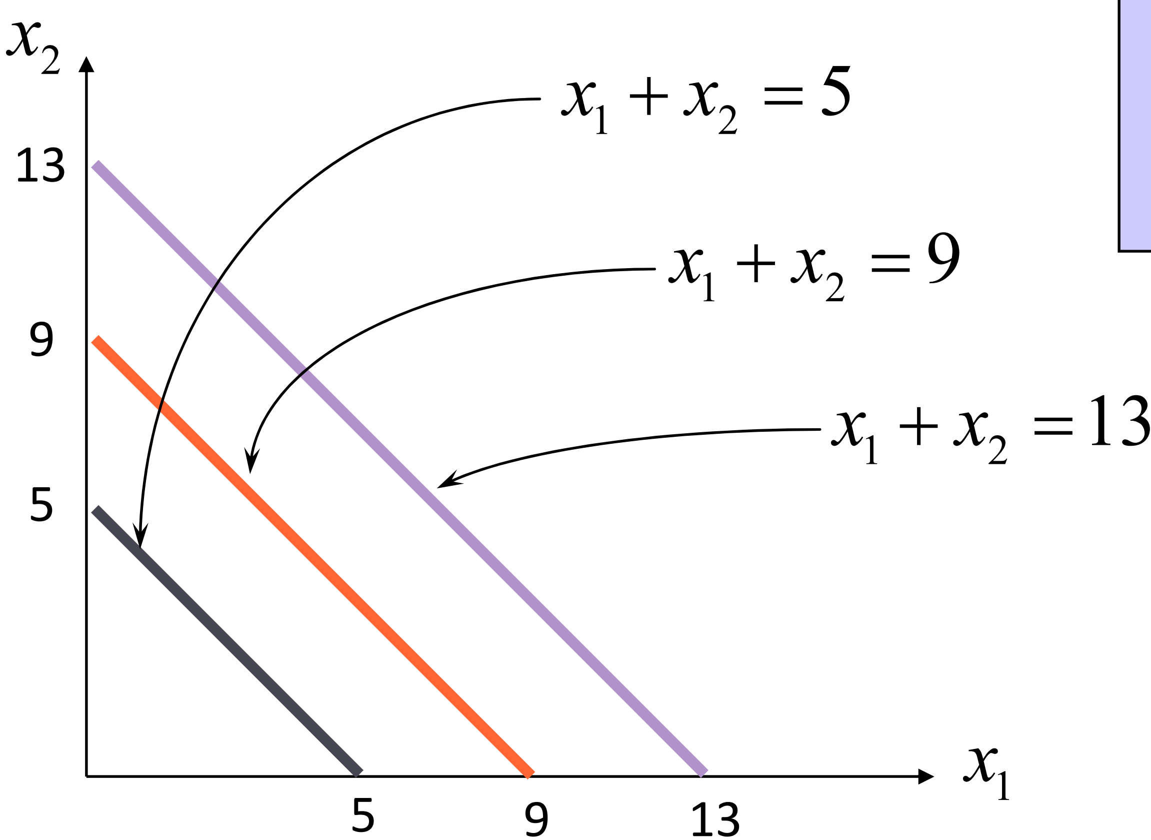


$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$x_2 = \frac{\bar{U}}{x_1}$$

Funkcje użyteczności – przykłady

- Jak wyglądają krzywe obojętności funkcji użyteczności o postaci $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$?

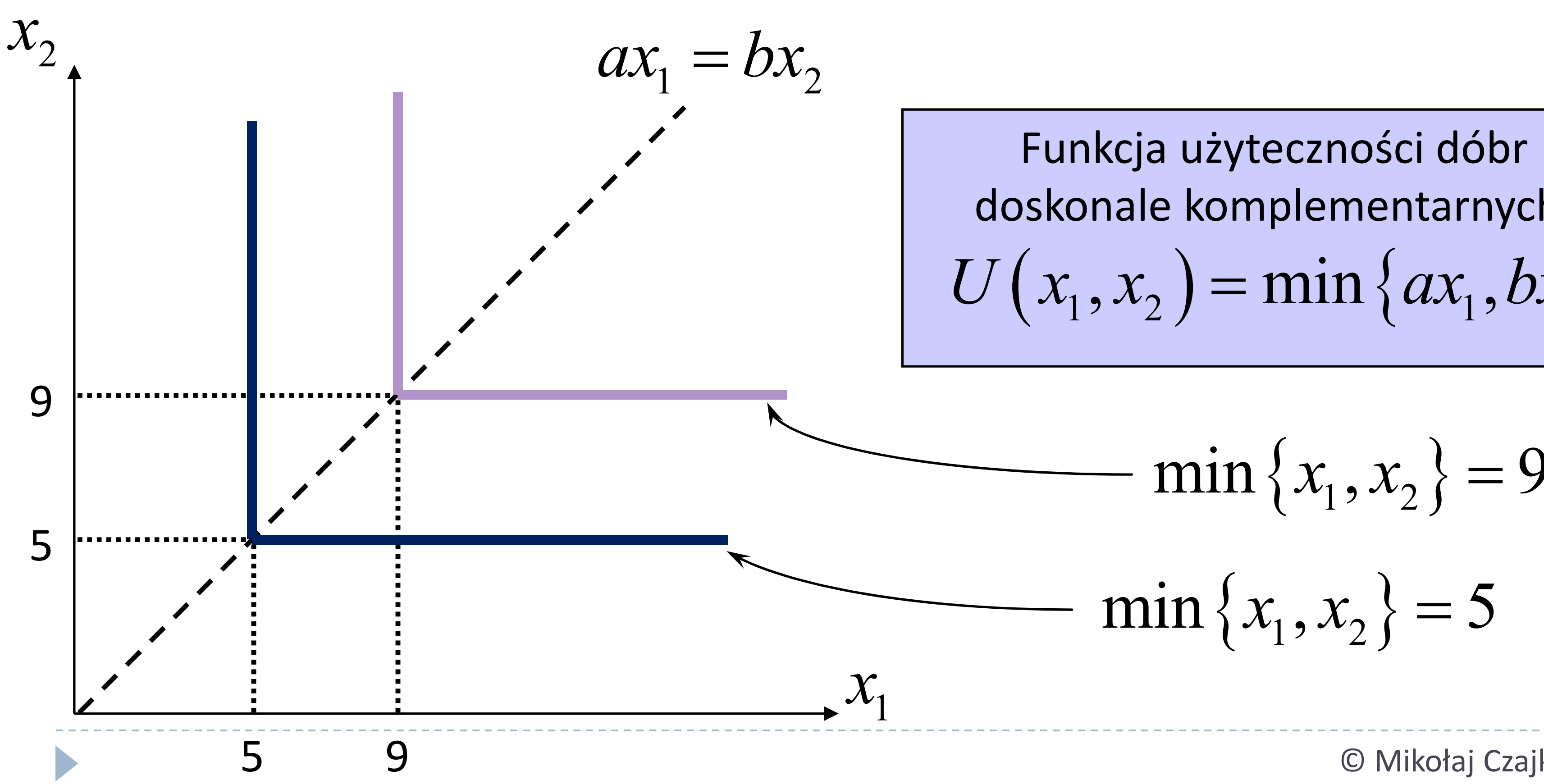


Funkcja użyteczności dóbr doskonale substytucyjnych:

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

Funkcje użyteczności – przykłady

- Jak wyglądają krzywe obojętności funkcji użyteczności o postaci $U(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$?



Funkcja użyteczności dóbr doskonale komplementarnych:

$$U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$

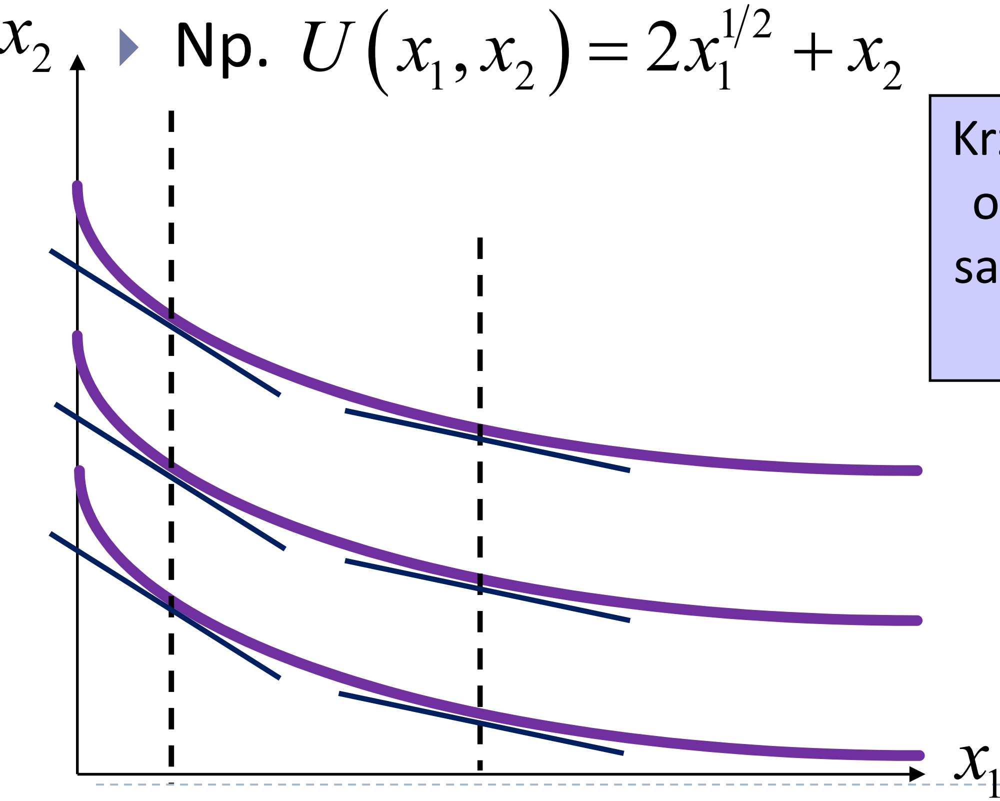
Funkcje użyteczności – przykłady

- Quasi-liniowa funkcja użyteczności ma postać:

$$U(x_1, x_2) = f(x_1) + x_2$$

  - Liniowa tylko względem x_2 (numeraire) – quasi-liniowa

- Np. $U(x_1, x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$



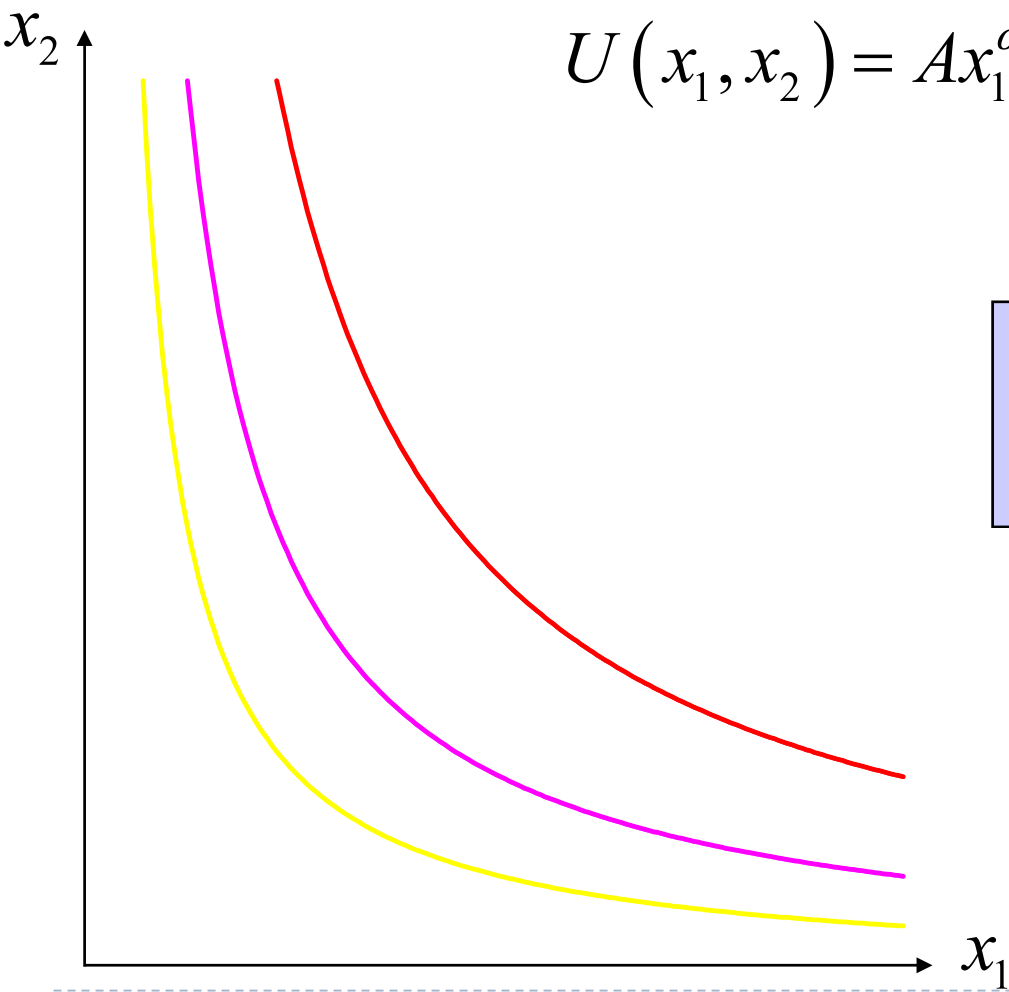
Krzywe obojętności quasi-liniowej funkcji obojętności są liniowym przesunięciem samych siebie wzdłuż osi reprezentującej ‘quasi-liniowe’ dobro

Dla danej ilości ‘niequasi-liniowego’ dobra nachylenie wszystkich izokwant jednakowe

Funkcje użyteczności

- Funkcja użyteczności typu Cobba-Douglasa

$$U\left(x_1, x_2\right) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$



Wszystkie krzywe obojętności hiperbolami – osie asymptotami każdej z nich

Funkcje użyteczności

- Przykłady krzywych obojętności jako izolinie funkcji użyteczności w 3D
  - Przykłady dla różnych funkcji użyteczności (plik Maple)

Użyteczność krańcowa

- W ekonomii ‘krańcowa’ (ang. *marginal*) oznacza wynikająca ze zmiany zmiennej o jednostkę, gdzie ‘jednostka’ jest nieskończenie mała
  - Np. jak zmienia się użyteczność na skutek (krańcowej) zmiany ilości jednego z dóbr w koszyku?
- Użyteczność krańcowa

$$MU_{x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta U(\bullet)}{\Delta x_i} = \frac{dU(\bullet)}{dx_i} = \frac{\partial U(\bullet)}{\partial x_i}$$

  - Więc – jeśli funkcja różniczkowalna – krańcowa użyteczność dobra to pochodna funkcji użyteczności po tym dobrze

Użyteczność krańcowa

- Na przykład dla funkcji: $U\left(x_1, x_2\right) = Ax_1x_2$

$$MU_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = Ax_2$$

$$MU_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = Ax_1$$

  - Krańcowa użyteczność danego dobra dla tej funkcji użyteczności zależy od tego jaki jest aktualnie poziom drugiego dobra w koszyku

Krańcowa stopa substytucji

- Powiedzieliśmy, że krańcowa stopa substytucji określa jak można wymieniać dobra w koszyku, pozostając na k.o.
  - Krzywa obojętności dla użyteczności k dana jest przez:

$$U\left(x_1, x_2\right) = k$$

  - Całkowita zmiana użyteczności – pochodna funkcji po każdej ze zmiennych razy krańcowo mała zmiana tej zmiennej

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

  - … równa zero, ponieważ chcemy zostać na krzywej obojętności
  - Przekształcając:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \bigg/ \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{MU_{x_2}}{MU_{x_1}}$$

Krańcowa stopa substytucji

- Pozostając na danej krzywej obojętności krańcowo małe ilości dóbr dx_1 / dx_2 można wymieniać w proporcji określonej przez *MRS*:

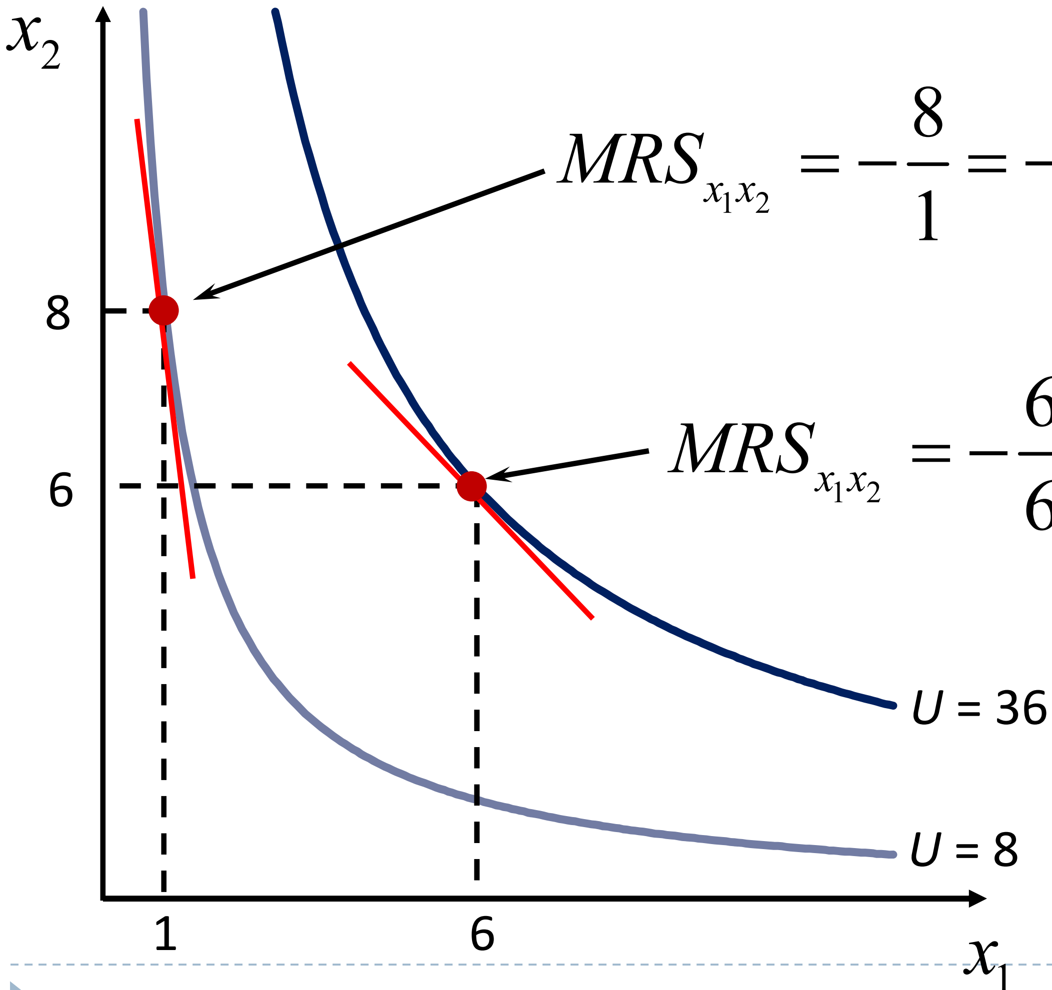
$$MRS_{x_2 x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{MU_{x_2}}{MU_{x_1}}$$

- *MRS* określa nachylenie krzywej obojętności w danym jej punkcie
  - Na przykład dla funkcji użyteczności typu Cobba-Douglasa o postaci $U\left(x_1, x_2\right) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ *MRS* wynosi:

$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}}{\beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}} = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

Krańcowa stopa substytucji

- Dla funkcji użyteczności $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$:



$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{8}{1} = -8$$

$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{6}{6} = -1$$

$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

$$\Downarrow$$

$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{x_2}{x_1}$$

Krańcowa stopa substytucji

- Dla quasi-liniowej funkcji użyteczności $U\left(x_1, x_2\right) = f\left(x_1\right) + x_2$

$$MU_{x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = f'\left(x_1\right)$$

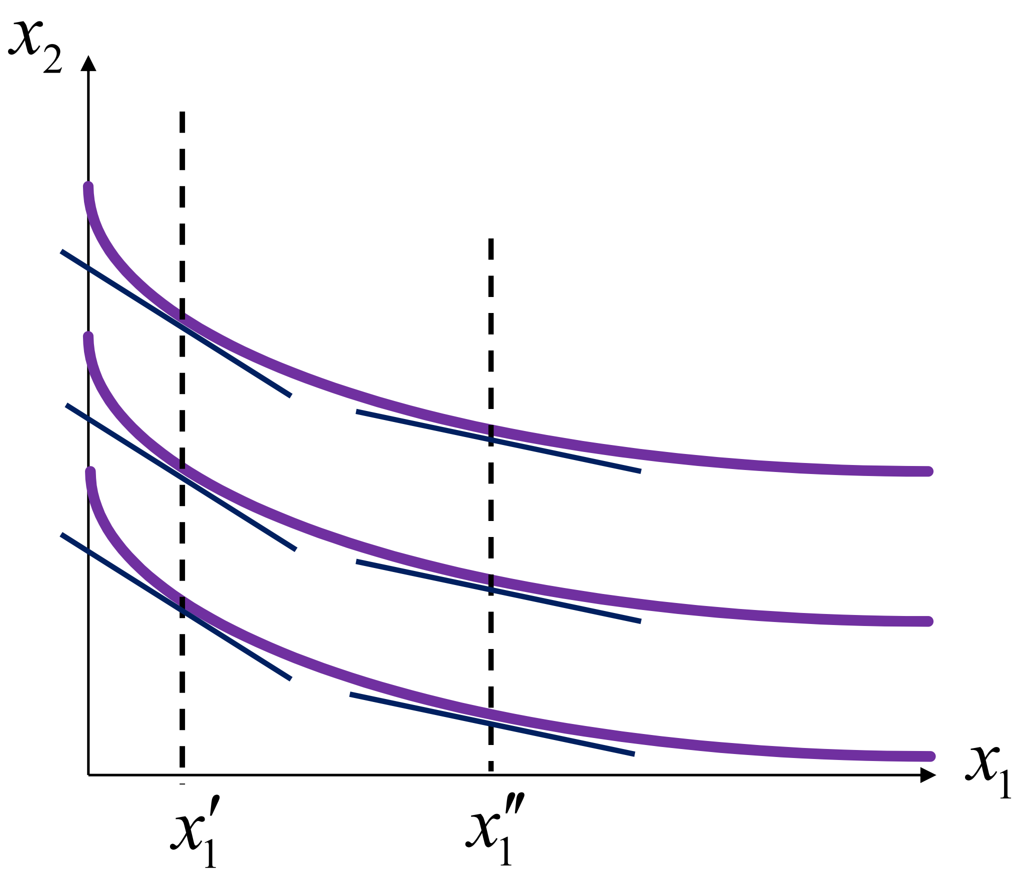
$$MU_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 1$$

$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{f'\left(x_1\right)}{1}$$

  - Krańcowa stopa substytucji nie zależy od x_2 więc nachylenie krzywych obojętności dla tego samego x_1 będzie równe

Krańcowa stopa substytucji

- Dla quasi-liniowej funkcji użyteczności $U(x_1, x_2) = 2x_1^{1/2} + x_2$



$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{f'(x_1)}{1}$$

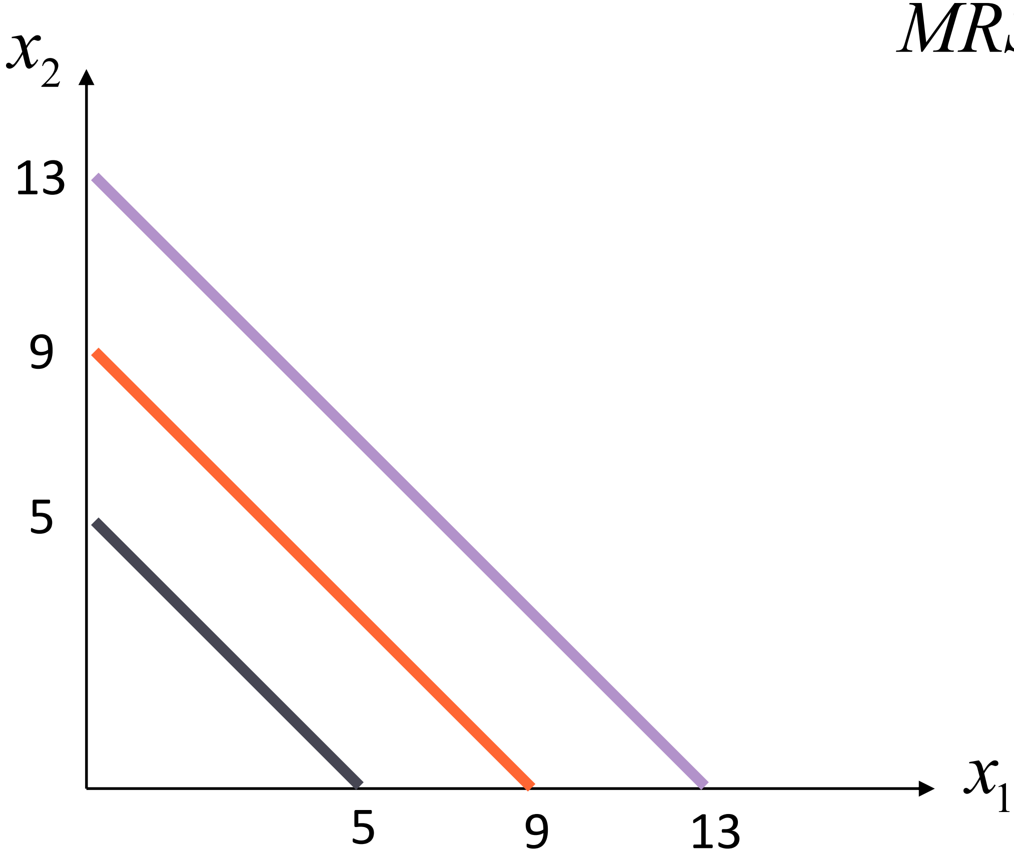
$$MRS_{x_1 x_2} = -x_1^{-1/2}$$

MRS niezależna od x_2

Krańcowa stopa substytucji

- Dla doskonałych substytutów: $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

$$MRS_{x_1 x_2} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_2} = -\frac{a}{b}$$

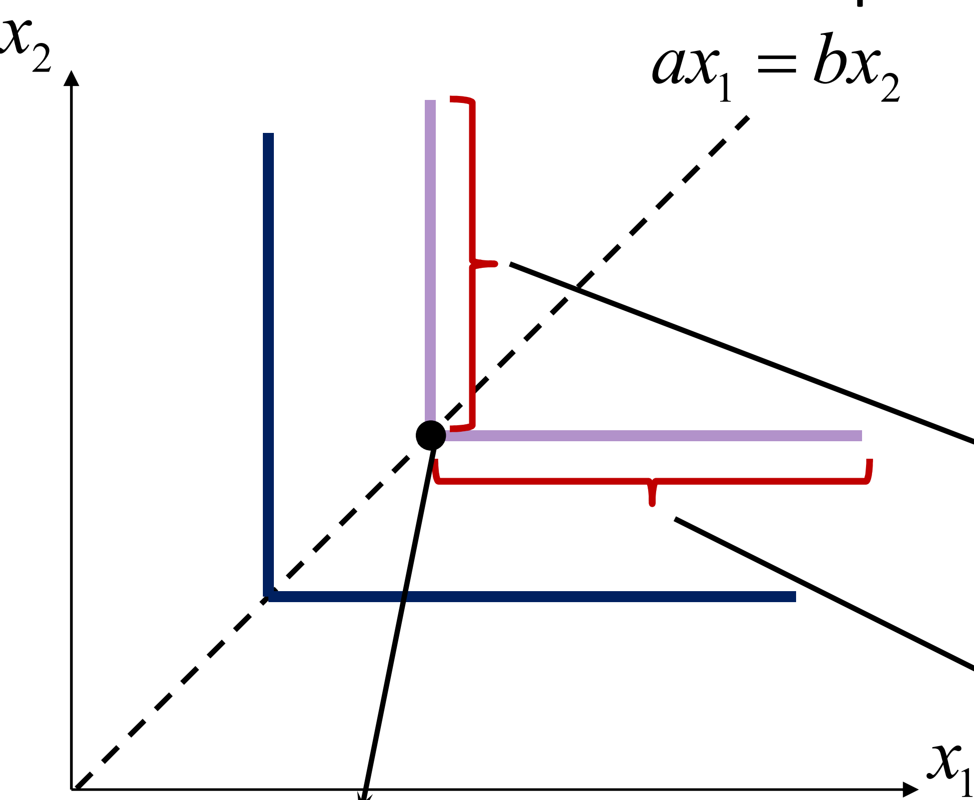


MRS stałe w każdym punkcie – określa nachylenie krzywych obojętności (które są prostymi)

Krańcowa stopa substytucji

- Dla dóbr doskonale komplementarnych:

$$U(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$



MRS nieokreślone (funkcja użyteczności nieróżniczkowalna)

$$MRS_{x_1 x_2} = -\infty$$

Nieskończenie wiele jednostek x_2 na odrobinę x_1

$$MRS_{x_1 x_2} = 0$$

Zero jednostek x_2 na odrobinę x_1

$$MRS_{x_1 x_2} = ?$$

Wiele możliwych ‘stycznych’

Krańcowa stopa substytucji

- Powiedzieliśmy, że każda ściśle rosnąca transformacja funkcji użyteczności zachowuje te same preferencje
  - Co więcej – nie zmienia *MRS*

$$U\left(x_1, x_2\right) \qquad V = f\left(U\left(x_1, x_2\right)\right)$$

$$MRS_{x_1x_2} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} \qquad MRS_{x_1x_2} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial x_2}} = -\frac{f'\left(U\right)\frac{\partial U}{\partial x_1}}{f'\left(U\right)\frac{\partial U}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

  - *MRS* jest niezależne od monotonicznych transformacji funkcji

Czy stwierdzenia są prawdziwe czy fałszywe?

1.2.4. Krańcowa stopa substytucji pokazuje, ile musi zapłacić konsument, żeby kupić dodatkową jednostkę dobra.

1.2.11. Jeżeli Fabian nie lubi ryżu (dobro X), lubi wino (Y) i nie nabywa żadnych innych dóbr, to jego krzywe obojętności mają dodatnie nachylenie.

1.2.5. Preferencje Marka opisuje funkcja użyteczności $U(x,y)=xy$, więc w jego przypadku krańcowa stopa substytucji jest stała.

1.2.6. Preferencje Mirka opisuje funkcja użyteczności $U(x,y)=x^2y$, a zatem w jego przypadku krańcowa stopa substytucji nie zmieni się, gdy konsumpcja obu dóbr ulegnie podwojeniu.

Wybierz poprawną odpowiedź:

1.3.3. Jeżeli preferencje konsumenta opisują gładkie i wypukłe krzywe obojętności i uważa on, że koszyki dóbr X (4, 6) i Y (9, 1) przynoszą mu takie samo zadowolenie, to:

a) uzna koszyk (6,5) za równie zadowalający co wymienione dwa koszyki;
b) uzna koszyk (6,5) za subiektywnie gorszy niż wymienione koszyki;
c) uzna koszyk (6,5) za subiektywnie lepszy niż wymienione koszyki;
d) nic nie da się powiedzieć o koszyku (6,5), nie znając dochodu konsumenta;
e) nic nie da się powiedzieć o koszyku (6,5), nie znając cen obu dóbr.

Rozwiąż zadania:

1.4.10. Wśród studentów SGH przeprowadzono ankietę. Badano, jakie kombinacje dóbr – piwa wypijanego natychmiast i książek, które można zatrzymać na własność – dają im jednakowe zadowolenie. W przypadku Magdy P. odpowiedzi były następujące:

Koszyki dające jednakowe zadowolenie

Koszyk	Ilość książek (X)	Ilość piwa (Y)
A	3	2
B	2	3
C	1	5
D	2	7
E	3	9

Zinterpretuj te odpowiedzi. Narysuj krzywą obojętności Magdy P. (zakładamy, że jest ciągła). Czy wybrane przez respondentkę ilości dóbr mogłyby być inne, gdyby nie musiała natychmiast wypijać piwa, lecz mogła je zabrać ze sobą tak jak książki?

7. Państwo Kowalscy właśnie kupili Fiata Uno. Przeczytali w instrukcji obsługi, że nie ma znaczenia jaką benzynę się do niego wlewa, 95 czy 98-oktanową. Co można powiedzieć o krańcowej stopie substytucji (Kowalskich) benzyny 95-oktanowej benzyną 98-oktanową? Jak wygląda w tym przypadku mapa obojętności? Jak można przedstawić ich preferencje za pomocą funkcji użyteczności? Zaproponuj kilka postaci odpowiedniej funkcji użyteczności.

10. Naszkicuj mapę obojętności i wyznacz krańcową stopę substytucji, gdy preferencje konsumenta opisuje funkcja użyteczności o postaci:

a) $U = 4X^2 + 4XY + Y^2$

b) $U = 4X^2 + Y^2$

c) $U = 4 + 2X^2Y^2$

d) $U = 4\min\{2X, 2Y\}$

11. Dla poniższych funkcji użyteczności zbadaj, odwołując się zarówno do metod analitycznych jak i do wykresów, czy krańcowa stopa substytucji jest malejąca.

a) $U = 0,3X + 2Y$

b) $U = (XY)^{1/2}$

c) $U = (X^2 + Y^2)^{1/2}$

d) $U = (X^2 - Y^2)^{1/2}$

e) $U = X^{2/3}Y^{1/3}$

f) $U = 2\ln(X) + \ln(Y)$

Praca samodzielna

- Literatura
  - V: 4
  - SH: 6 (Differentiation), 7 (Derivatives in Use), 8 (Single-Variable Optimization), 11 (Functions of Many Variables), 13 (Multivariable Optimization), 14 (Constrained Optimization)
  - PR: 3.1
  - P: 3.2
  - BB: 3.2-3.5
  - NS: 3

Praca samodzielna

- Zadania
  - HW4 (www)
  - ZZV: 4