Mikroekonomia B.2

Mikołaj Czajkowski

Przychody skali

- Proporcjonalne zwiększenie czynników = zwiększenie produkcji, ale czy również proporcjonalne?
- W zależności od odpowiedzi:
  - Stałe przychody skali, CRS (*constant returns to scale*)
  - Rosnące przychody skali, IRS (*increasing returns to scale*)
  - Malejące przychody skali, DRS (*decreasing returns to scale*)

Rosnące przychody skali

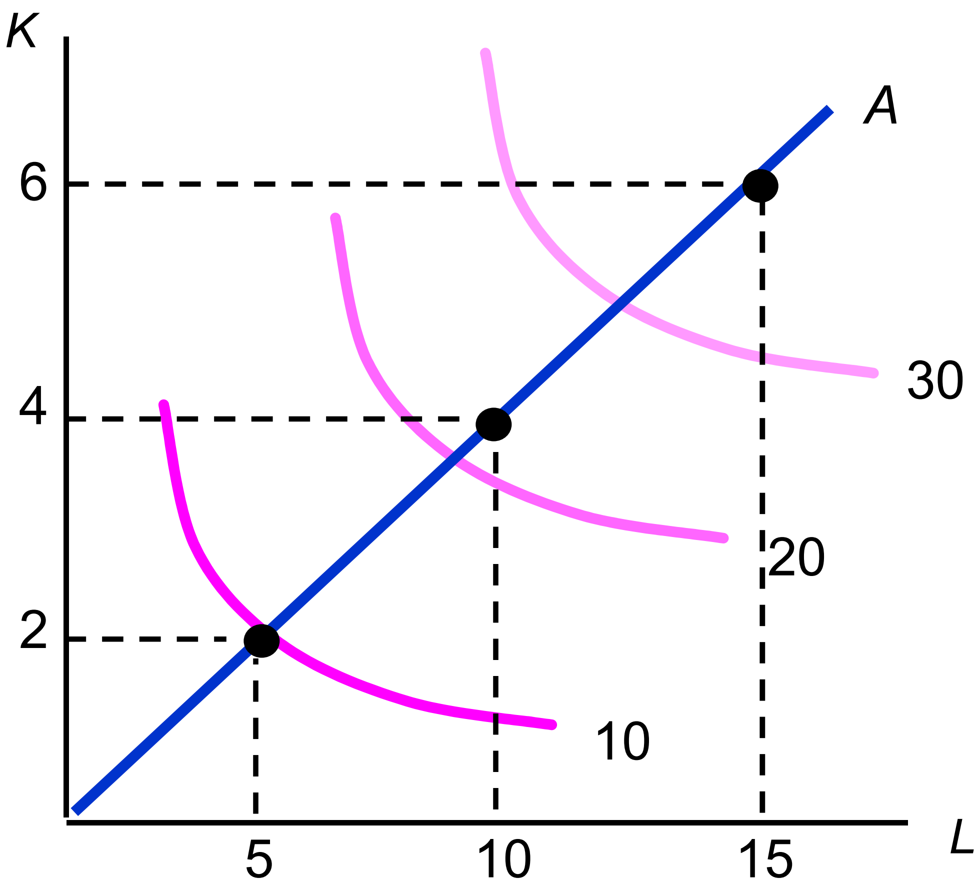
- W wyniku proporcjonalnego zwiększenia czynników produkcji produkcja rośnie ponadproporcjonalnie

$$\underset{\lambda>1}{\forall} f\left(\lambda K, \lambda L\right) > \lambda f\left(K, L\right)$$

  - Większa produkcja wymaga średnio mniej czynników na jednostkę produkcji
  - Jedna duża firma bardziej efektywna niż wiele małych
  - Izokwanty ‘zagęszczają się’ ze wzrostem czynników produkcji

Rosnące przychody skali

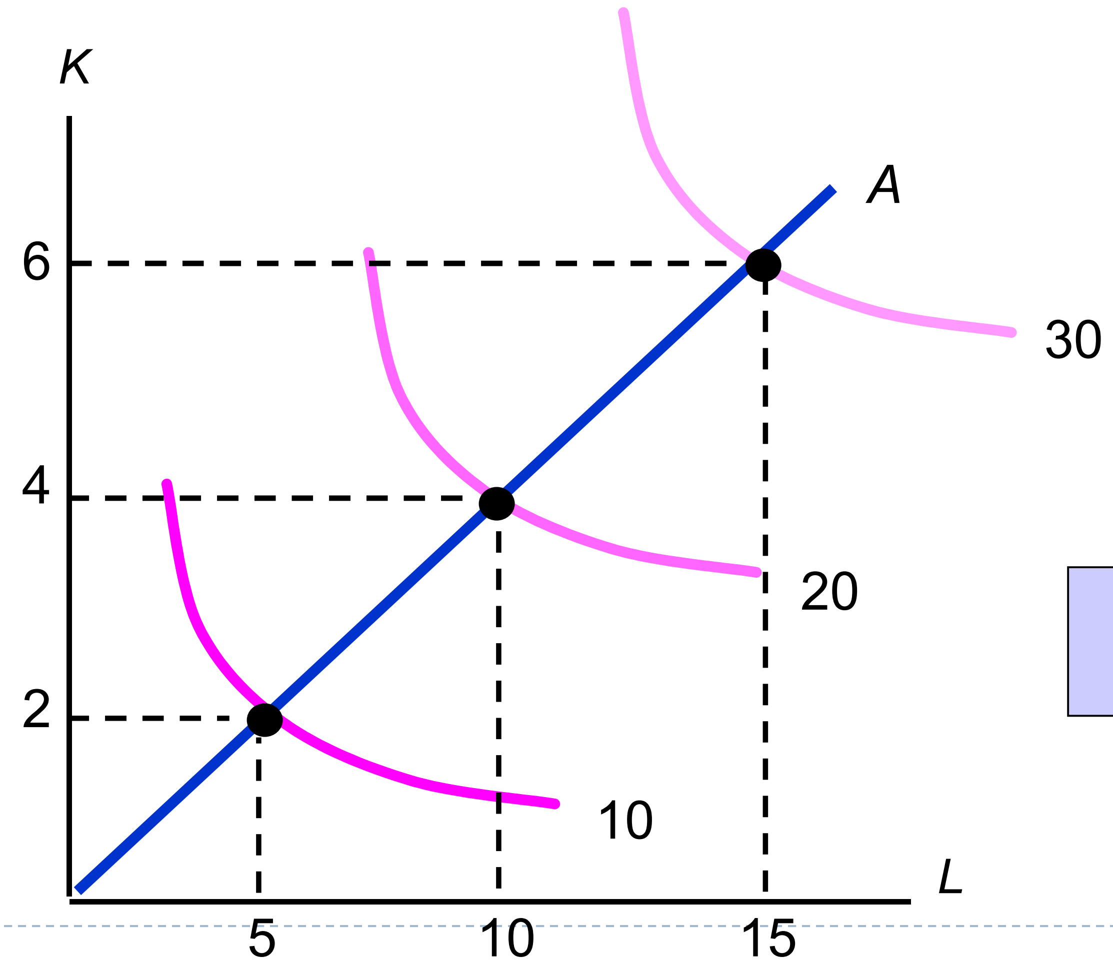
$$\underset{\lambda>1}{\forall} f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$$



Izokwanty 'coraz gęściej'

Stałe przychody skali

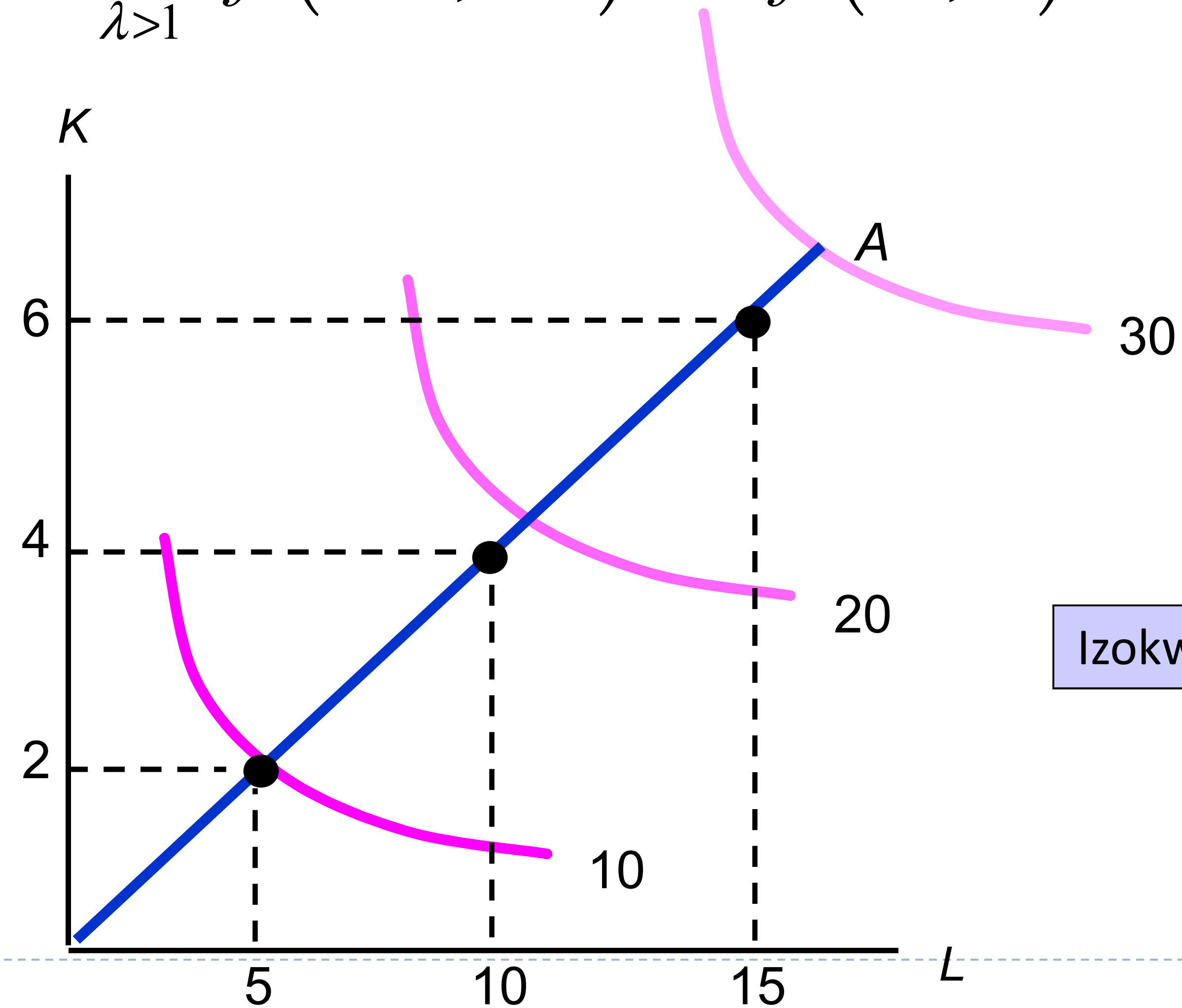
$$\underset{\lambda>0}{\forall} \; f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$$



Izokwanty 'w tych samych odległościach'

Malejące przychody skali:

$$\underset{\lambda>1}{\forall} \; f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$$



Izokwanty ‘coraz rzadziej’

Case study – Henry Ford i fabryka River Rouge

- Gdy Henry Ford założył pierwszą fabrykę samochodów (1903) konkurencja działała głównie w formie małych manufaktur, gdzie wysoko wykwalifikowani pracownicy działali w zespołach i przechodzili od jednego egzemplarza do następnego. Ford wprowadził dwie innowacje – (1) standaryzowane części (zamienne), które mogli montować nawet nisko wyszkoleni pracownicy i (2) zamiast grup przechodzących od samochodu do samochodu wprowadził linię produkcyjną, a pracownicy, z których każdy miał tylko 1 zadanie, pozostawali w miejscu.
- Pierwsza fabryka w Highland Park pod Detroit odniosła wielki sukces i montowany tam Model T był poza zasięgiem konkurencji jeśli chodzi o cenę.
- Ford sądził, że wprowadzając dalszy podział pracy i budując jeszcze większą fabrykę będzie w stanie jeszcze bardziej obniżyć cenę.
- W 1927 powstała fabryka w River Rouge, która montowała Model A. Skala fabryki była jednak zbyt duża, wkraczając w ujemne przychody skali. Produkowany tam Model A nie mógł konkurować z innymi modelami, produkowanymi już przez GM i Chrysler. Skalę fabryki oddaje opis z biografii Forda:
  - *Na terenie fabryki znajdowały się 93 różne budynki. Linia kolejowa miała długość 93 mil, a taśmy montażowe 27 mil. W fabryce pracowało około 75000 ludzi. Samych 5000 ludzi nie robiło nic innego niż sprzątanie, zużywając 5000 mopów, 3000 szczotek i 86 ton mydła miesięcznie do sprzątania podłóg, ścian i 3,3 ha okien.*

Przychody skali a funkcja Cobba-Douglasa

- Sprawdzamy przychody skali:

$$(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} \stackrel{?}{=} \lambda K^{\alpha} L^{\beta}$$

$$\lambda^{\alpha+\beta} K^{\alpha} L^{\beta} = \lambda K^{\alpha} L^{\beta} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$$

- Więc dla funkcji Cobba-Douglasa:
  - $\alpha + \beta = 1$ – stałe przychody skali
  - $\alpha + \beta > 1$ – rosnące przychody skali
  - $\alpha + \beta < 1$ – malejące przychody skali
- Wykresy – funkcja Cobba-Douglasa a przychody skali i krańcowa produktywność

Case study – przychody skali w wybranych gałęziach przemysłu USA

- Rosnące, stałe, malejące przychody skali często daje się zaobserwować w różnych gałęziach przemysłu. Poniższe wyniki oszacowano dla gospodarki USA (Hsieh, 1995), zakładając funkcję produkcji typu Cobba-Douglasa: $q = AL^a K^b$
- Wzrost ilości czynników produkcji o 1% powoduje procentowy wzrost produkcji o podaną wielkość:

	Praca, *a*	Kapitał, *b*	Skala, *a+b*
Malejące przychody skali:			
Produkty tytoniowe	0,18	0,33	0,51
Żywność	0,43	0,48	0,91
Sprzęt transportowy	0,44	0,48	0,92
Stałe przychody skali:			
Tekstylia	0,70	0,31	1,01
Meble	0,62	0,40	1,02
Elektronika	0,49	0,53	1,02
Rosnące przychody skali:			
Papier	0,44	0,65	1,09
Produkty ropopochodne	0,30	0,88	1,18
Metale	0,51	0,73	1,24

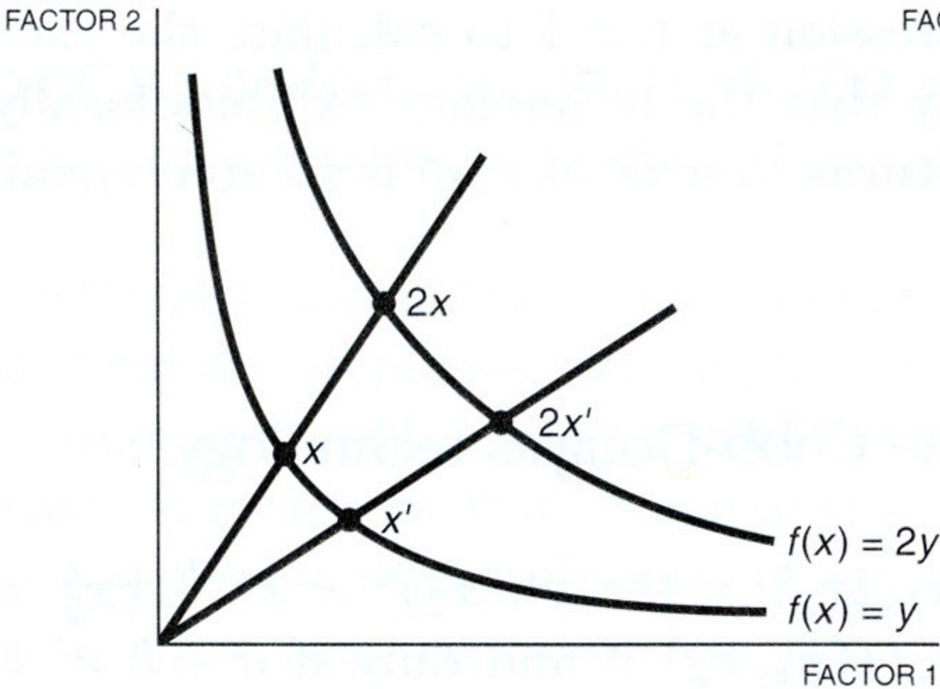
Homogeniczność funkcji

- Funkcja $f\left(K,L\right)$ homogeniczna stopnia α gdy

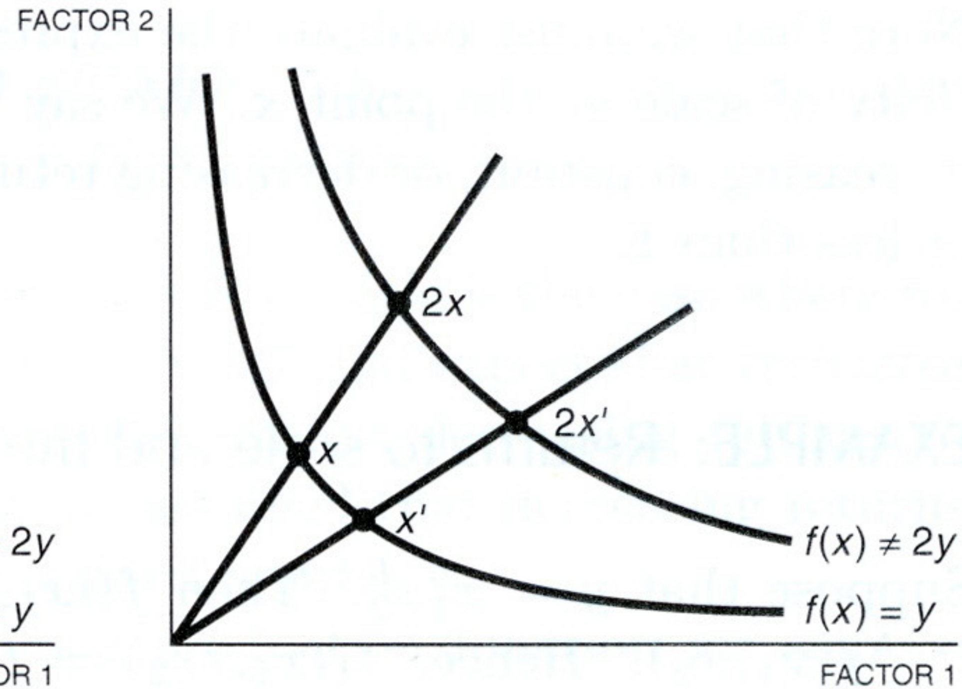
$$\exists_{\alpha} \ \forall_{\lambda>0} \ f\left(\lambda K, \lambda L\right) = \lambda^{\alpha} f\left(K,L\right)$$

  - Zwykle w ekonomii znaczenie ma homogeniczność stopnia 0 i 1
    - Np. ograniczenie budżetowe – homogeniczne stopnia 0
  - Stałe przychody skali – funkcja produkcji homogeniczna stopnia 1
  - Funkcja Cobba-Douglasa – homogeniczna stopnia $\alpha+\beta$
  - Jeśli funkcja $f\left(\mathbf{x}\right)$ jest homogeniczna stopnia α to $\partial f\left(\mathbf{x}\right)/\partial x_i$ homogeniczna stopnia $\alpha-1$
- Funkcja homotetyczna – monotoniczna transformacja dowolnej funkcji homogenicznej stopnia 1
- Dla funkcji homogenicznej stopnia 1 / homotetycznej *MRTS* nie zależy od skali produkcji

Homogeniczność / homotetyczność funkcji



Funkcja homogeniczna stopnia 1
(stałe przychody skali)



Funkcja homotetyczna
(i nie homogeniczna)

Izokwanty są obrazem samych siebie wzdłuż promieni
Dla każdego promienia – to samo nachylenie każdej izokwanty
Funkcja produkcji zależy od relatywnej ilości czynników, nie od ich absolutnych wartości

Case study – dlaczego przepowiednie Malthusa się nie sprawdziły?

- Malejące krańcowe produktywności vs. malejące przychody skali
  - Przykład:

$$q(K,L) = K^{2/3}L^{2/3}$$

    - Malejąca krańcowa produktywność *K*:

$$MP_K = \frac{\partial q(K,L)}{\partial K} = \frac{2}{3}K^{-1/3}L^{2/3} = \frac{2L^{2/3}}{3K^{1/3}}$$

$$\frac{\partial^2 q(K,L)}{\partial K^2} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)K^{-4/3}L^{2/3} = -\left(\frac{2L^{2/3}}{9K^{4/3}}\right) < 0$$

Case study – dlaczego przepowiednie Malthusa się nie sprawdziły?

- Malejąca krańcowa produktywność *L*:

$$MP_L = \frac{\partial q(K,L)}{\partial L} = \frac{2}{3} K^{2/3} L^{-1/3} = \frac{2K^{2/3}}{3L^{1/3}}$$

$$\frac{\partial^2 q(K,L)}{\partial L^2} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) K^{2/3} L^{-4/3} = -\left(\frac{2K^{2/3}}{9L^{4/3}}\right) < 0$$

- Więc obie *MP* malejące

Case study –
dlaczego przepowiednie Malthusa się nie sprawdziły?

- A przychody skali…

$$q(\lambda K, \lambda L) \stackrel{?}{=} \lambda q(K, L)$$

$$(\lambda K)^{2/3} (\lambda L)^{2/3} \stackrel{?}{=} \lambda K^{2/3} L^{2/3}$$

$$\lambda^{4/3} K^{2/3} L^{2/3} > \lambda K^{2/3} L^{2/3}$$

- …rosnące

Elastyczność

- Elastyczność cenowa popytu:
  - ‘Relatywna zmiana popytu wynikająca z relatywnej zmiany ceny’

$$q = f\left(p\right)$$

$$\varepsilon_P q = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$$

Elastyczność

- Np. $$q = 70 - 2p$$

$$\varepsilon_P q = -2 \cdot \frac{p}{q} = -\frac{2p}{70 - 2p}$$

- Jeśli obecnie np. $p = 20,\ q = 30$

  to elastyczność w tym punkcie:

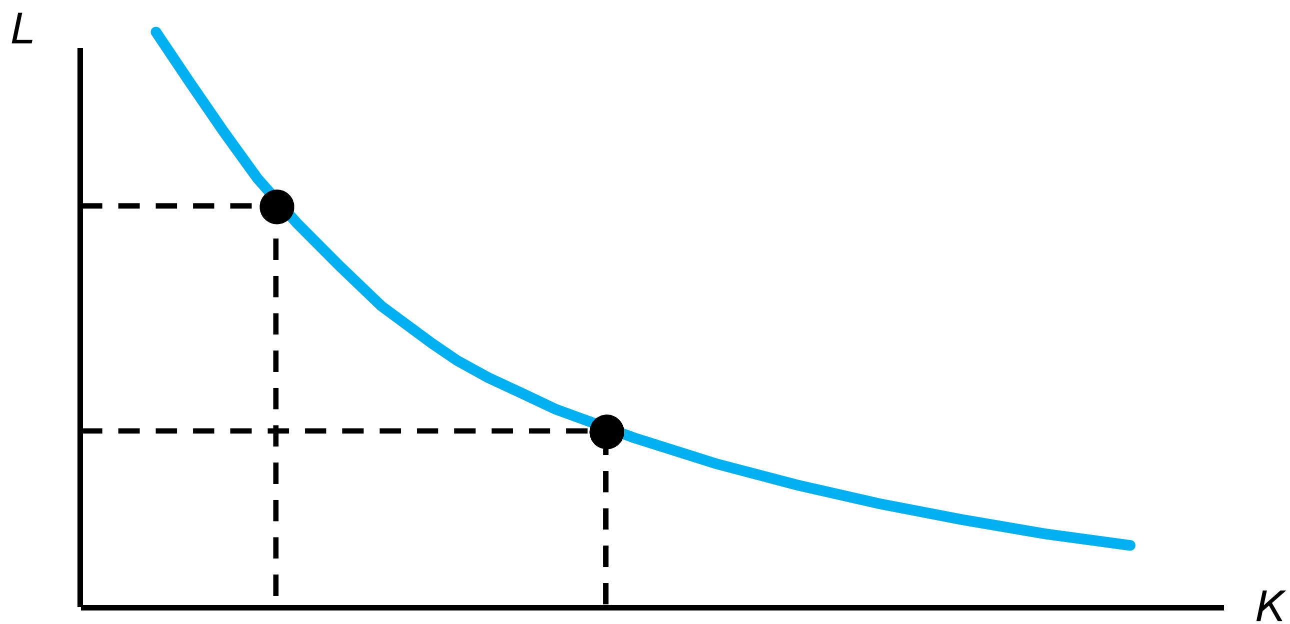
$$\varepsilon_P q = -2 \cdot \frac{20}{30} = -1,33$$

- Jeśli cenę zwiększyć o 1% to popyt spadnie o 1,33%

  (niezależnie od jednostek ***p*** i ***q***)

Elastyczność technicznej substytucji czynników

- Załóżmy, że izokwanta jest ściśle wypukła:



- Każdej $MRTS_{KL}$ odpowiada jakiś punkt (K,L) na izokwancie, a więc jakaś relacja L/K
- L/K jest zatem funkcją $MRTS_{KL}$

Elastyczność technicznej substytucji czynników

- Jeśli $\frac{L}{K} = f\left(MRTS_{KL}\right)$

  to elastyczność substytucji pomiędzy *K* a *L* to:

$$\sigma_{LK} = \varepsilon_{MRTS_{KL}} \frac{L}{K}$$

- Mierzy jak zmieniają się warunki wymiany czynników ($MRTS_{KL}$) jeśli wziąć inne proporcje czynników
- Jak zmienia się relacja czynników ze zmianą nachylenia izokwanty
- Intuicyjnie: ‘<u>relatywna</u> substytucyjność czynników’

Elastyczność technicznej substytucji czynników

- Elastyczność zdefiniowana jest jako relatywna zmiana stosunku czynników do relatywnej zmiany *MRTS*:

$$\sigma_{LK} = \frac{\dfrac{d\left(L/K\right)}{L/K}}{\dfrac{dMRTS_{KL}}{MRTS_{KL}}} = \frac{d\ln\left(L/K\right)}{d\ln\left|MRTS_{KL}\right|}$$

  - Jeśli mała zmiana nachylenia daje dużą zmianę relacji czynników – izokwanta jest relatywnie płaska (wysoka elastyczność substytucji)
  - Mierzy kurwaturę izokwanty ($MRTS_{KL}$ – mierzy jej nachylenie)

- Funkcja o stałej elastyczności technicznej substytucji czynników, CES (*constant elasticity of substitution*) ma postać:

$$y = \left(aK^{\rho} + bL^{\rho}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}}$$

  - Dla uproszczenia weźmy: $a = b = \gamma = 1$
  - Wtedy elastyczność substytucji to $\sigma = \dfrac{1}{1-\rho}$

Funkcja o stałej elastyczności technicznej substytucji czynników

- Funkcja $y=\left(K^{\rho}+L^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$

$$MRTS_{KL}=-\frac{MP_K}{MP_L}=-\frac{\frac{1}{\rho}\left(K^{\rho}+L^{\rho}\right)^{\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}\rho K^{\rho-1}}{\frac{1}{\rho}\left(K^{\rho}+L^{\rho}\right)^{\left(\frac{1}{\rho}-1\right)}\rho L^{\rho-1}}=-\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1}\Rightarrow\frac{L}{K}=\left(-MRTS_{KL}\right)^{\frac{-1}{\rho-1}}$$

$$\sigma_{LK}=\varepsilon_{MRTS_{KL}}\frac{L}{K}=\frac{-1}{\rho-1}\left(-MRTS_{KL}\right)^{\frac{-1}{\rho-1}-1}\frac{-MRTS_{KL}}{\frac{L}{K}}=\frac{1}{1-\rho}\frac{\left(-MRTS_{KL}\right)^{\frac{-1}{\rho-1}}}{\left(-MRTS_{KL}\right)^{\frac{-1}{\rho-1}}}=\frac{1}{1-\rho}$$

Funkcja o stałej elastyczności technicznej substytucji czynników

- Funkcja $y=\left(K^{\rho}+L^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$

$$\sigma_{LK}=\frac{d\ln\left(L/K\right)}{d\ln\left|MRTS_{KL}\right|}=\frac{d\ln\left(L/K\right)}{d\ln\left[\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1}\right]}=\frac{d\ln\left(L/K\right)}{d\ln\left[\left(\frac{L}{K}\right)^{-\rho+1}\right]}=$$

$$=\frac{d\ln\left(L/K\right)}{(1-\rho)\,d\ln\left(L/K\right)}=\frac{1}{1-\rho}$$

Funkcja o stałej elastyczności technicznej substytucji czynników

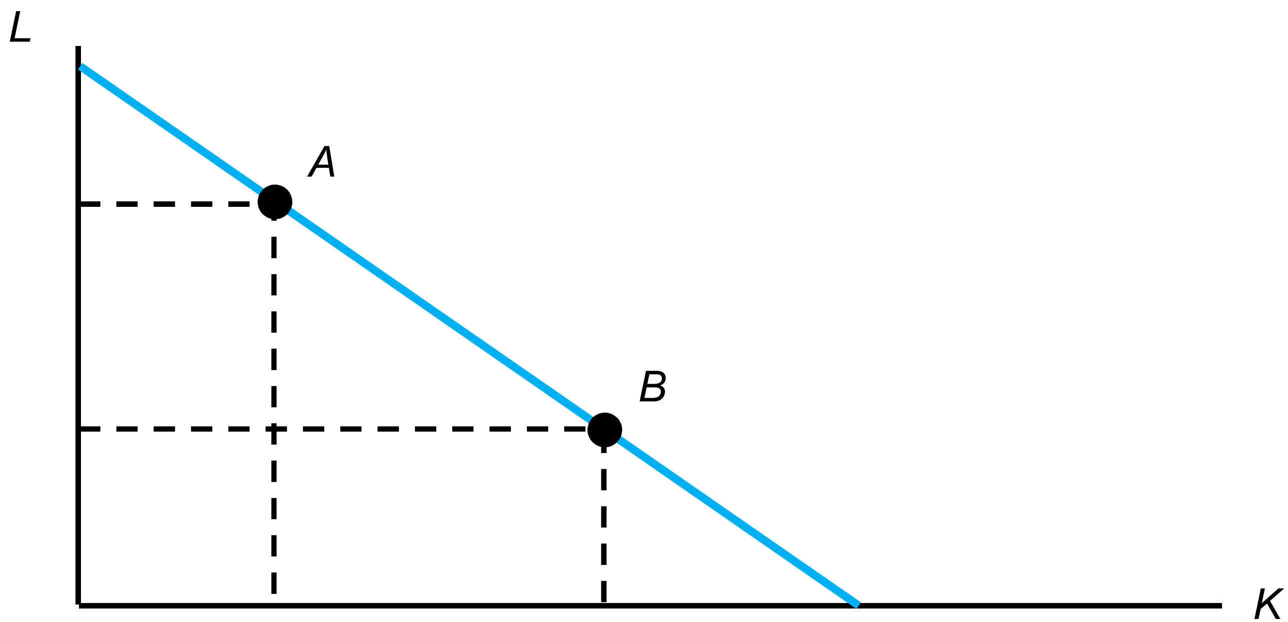
- Funkcja CES: $y=\left(K^{\rho}+L^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$
- Elastyczność substytucji $\sigma=\dfrac{1}{1-\rho}$

- Niektóre przypadki szczególne:
  - Liniowa funkcja produkcji: $\rho=1,\ \sigma=\infty$

    $y=K+L$

Elastyczność technicznej substytucji czynników

- Liniowa funkcja produkcji, izokwanta:



- W *A* inna relacja *L/K* niż w *B*, a *MRTS* taka sama
- Wniosek: elastyczność substytucji nieskończona

Elastyczność technicznej substytucji czynników

- Funkcja produkcji Leontiefa $\rho = -\infty, \ \sigma = 0$
- Dla $\rho = -\infty \quad y = \left(K^{\rho} + L^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ nie jest zdefiniowane, ale w granicy:

$$\lim_{\rho \to -\infty} MRTS_{KL} = \lim_{\rho \to -\infty} \left(-\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho - 1} \right)$$

$$L > K \Rightarrow MRTS_{KL} = -\infty$$

$$L < K \Rightarrow MRTS_{KL} = 0$$

- Więc izokwanta wygląda jak dla funkcji Leontiefa

Elastyczność technicznej substytucji czynników

- Funkcja produkcji Cobba-Douglasa $\rho = 0,\ \sigma = 1$
  - Dla $\rho = 0$, $y = \left(K^{\rho} + L^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$ nie jest zdefiniowane, ale

$$\lim_{\rho \to 0} MRTS_{KL} = \lim_{\rho \to 0}\left(-\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho-1}\right) = -\frac{L}{K} = MRTS_{KL}^{CD}$$

Elastyczność technicznej substytucji czynników

- Dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa – inaczej:

$$q = f(K, L) = AK^{\alpha} L^{\beta}$$

$$MRTS_{KL} = -\frac{A\alpha K^{\alpha-1} L^{\beta}}{A\beta K^{\alpha} L^{\beta-1}} = -\frac{\alpha L}{\beta K}$$

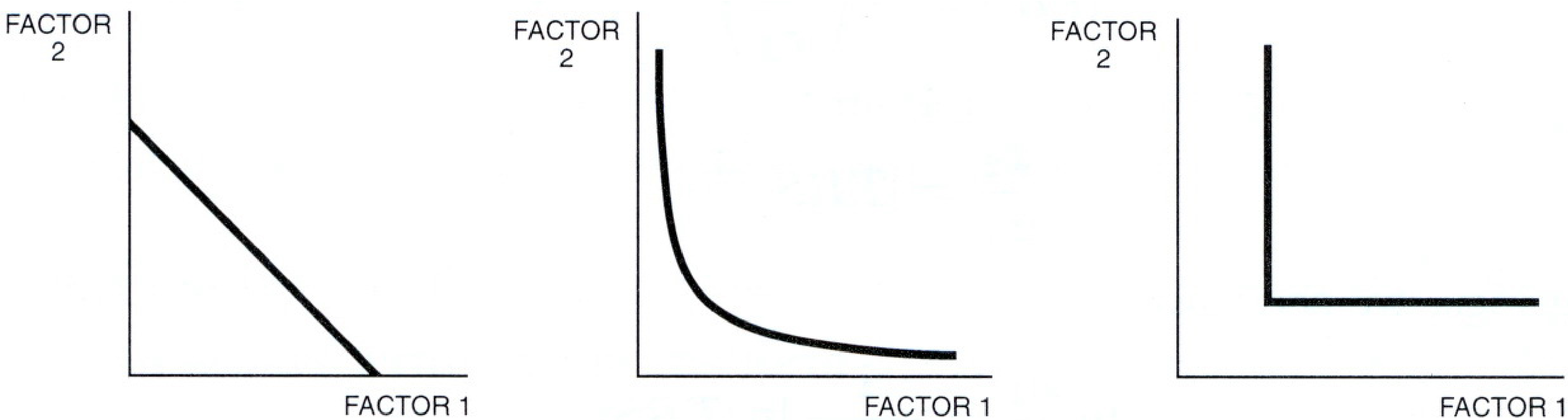
$$\frac{L}{K} = -\frac{\beta}{\alpha} MRTS_{KL}$$

więc: $\sigma_{LK} = \varepsilon_{MRTS_{KL}} \dfrac{L}{K} = -\dfrac{\beta}{\alpha} \dfrac{MRTS_{KL}}{\dfrac{L}{K}} = -\dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \dfrac{MRTS_{KL}}{-\dfrac{\beta}{\alpha} MRTS_{KL}} = 1$

Elastyczność technicznej substytucji czynników

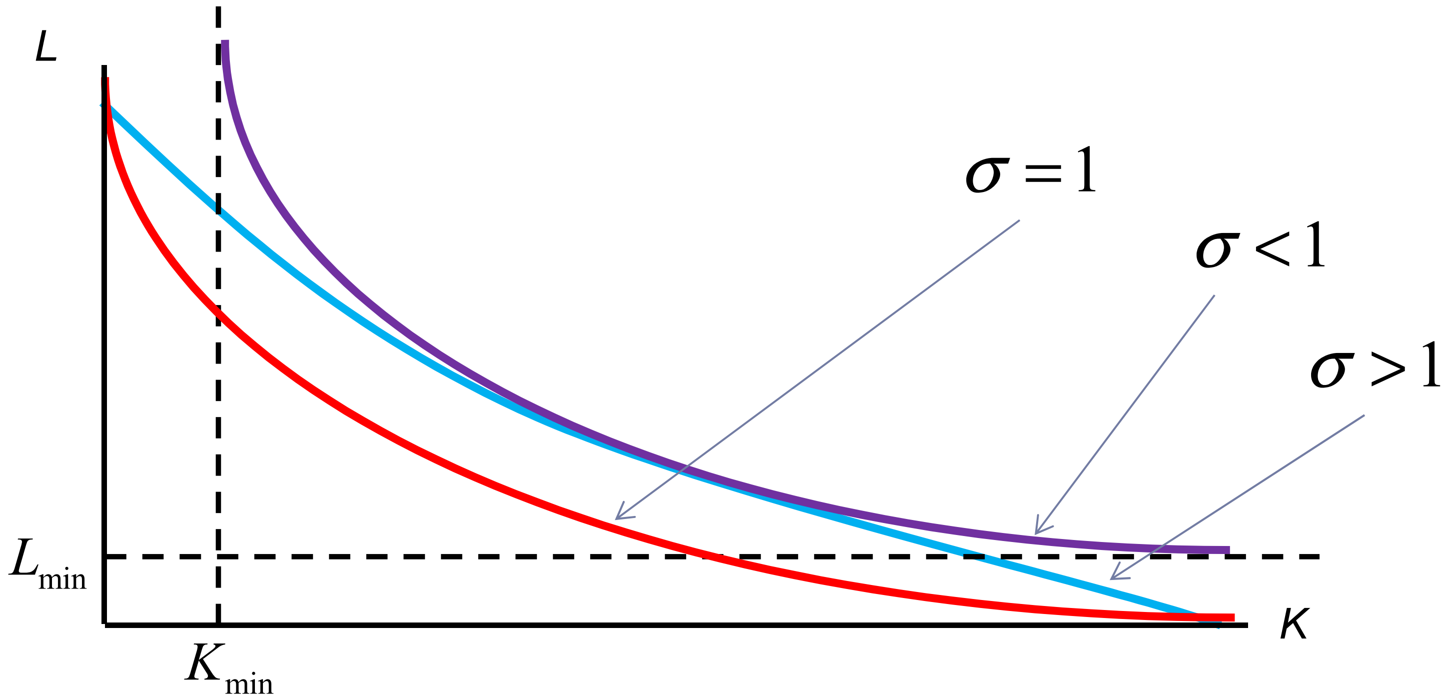
- Wniosek – funkcja typu Cobba-Douglasa ma stałą elastyczność substytucji czynników = 1

- Izokwanty typowych funkcji CES:



Elastyczność technicznej substytucji czynników

- Graficznie:



Niezbędne czynniki produkcji

- 'Czynnik produkcji jest *niezbędny*, jeśli przy jego nakładzie 0 produkcja wynosi 0, niezależnie od nakładów innych czynników'

$$\underset{X_k}{\exists} \; \underset{X_1,\ldots,X_n \neq X_k}{\forall} f\left(X_1,\ldots,X_k=0,\ldots,X_n\right)=0$$

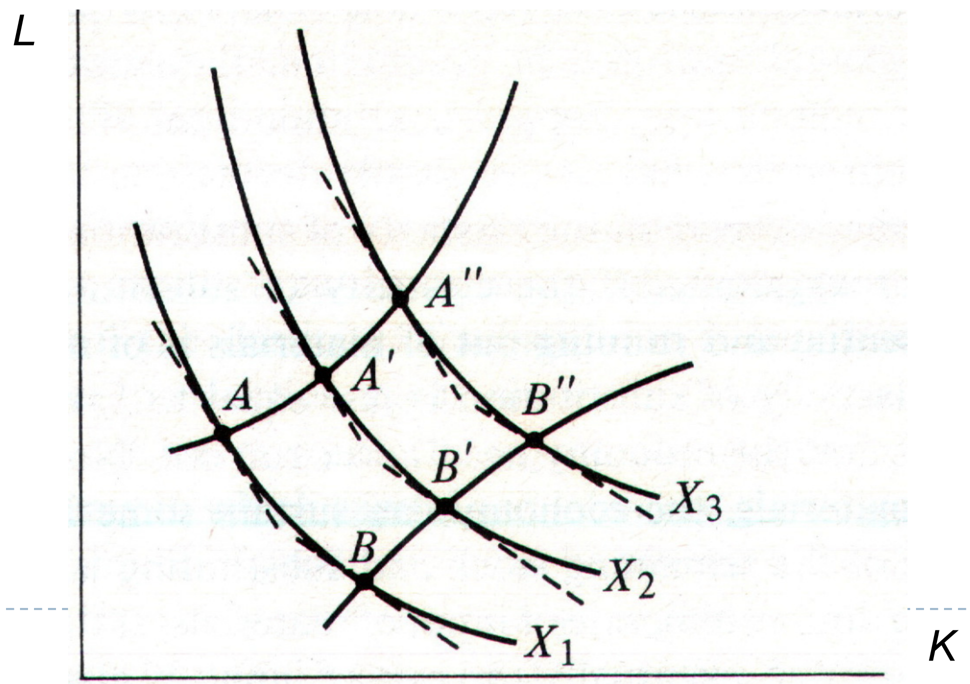
  - Dla wypukłych izokwant, jeśli elastyczność technicznej substytucji ≤ 1 to czynnik niezbędny

Przykład – zrównoważony rozwój

- Załóżmy, że wszystkie odnawialne czynniki produkcji połączymy w jeden syntetyczny czynnik
- Drugim czynnikiem produkcji będą czynniki nieodnawialne (np. żelazo, węgiel, ropa, aluminium…)
  - W długim okresie wykorzystanie tych czynników musi zmaleć
- Przyszłość ludzkości zależy od elastyczności technicznej substytucji czynników odnawialnych i nieodnawialnych
  - Jeśli $\sigma > 1$ – czynniki nieodnawialne nie są niezbędne
  - Jeśli $\sigma = 1$ – czynniki nieodnawialne są niezbędne, ale gospodarka nie musi się zawalić
  - Jeśli $\sigma < 1$ – w końcu przestaniemy móc cokolwiek produkować

Izokliny

- Izoklina dostarcza informacji o tym, jak kolejne izokwanty mają się do siebie
- ‘Wszystkie punkty na mapie izokwant, w których *MRTS* jest jednakowe’
- Dla każdego punktu izokwanty można wyznaczyć izoklinę

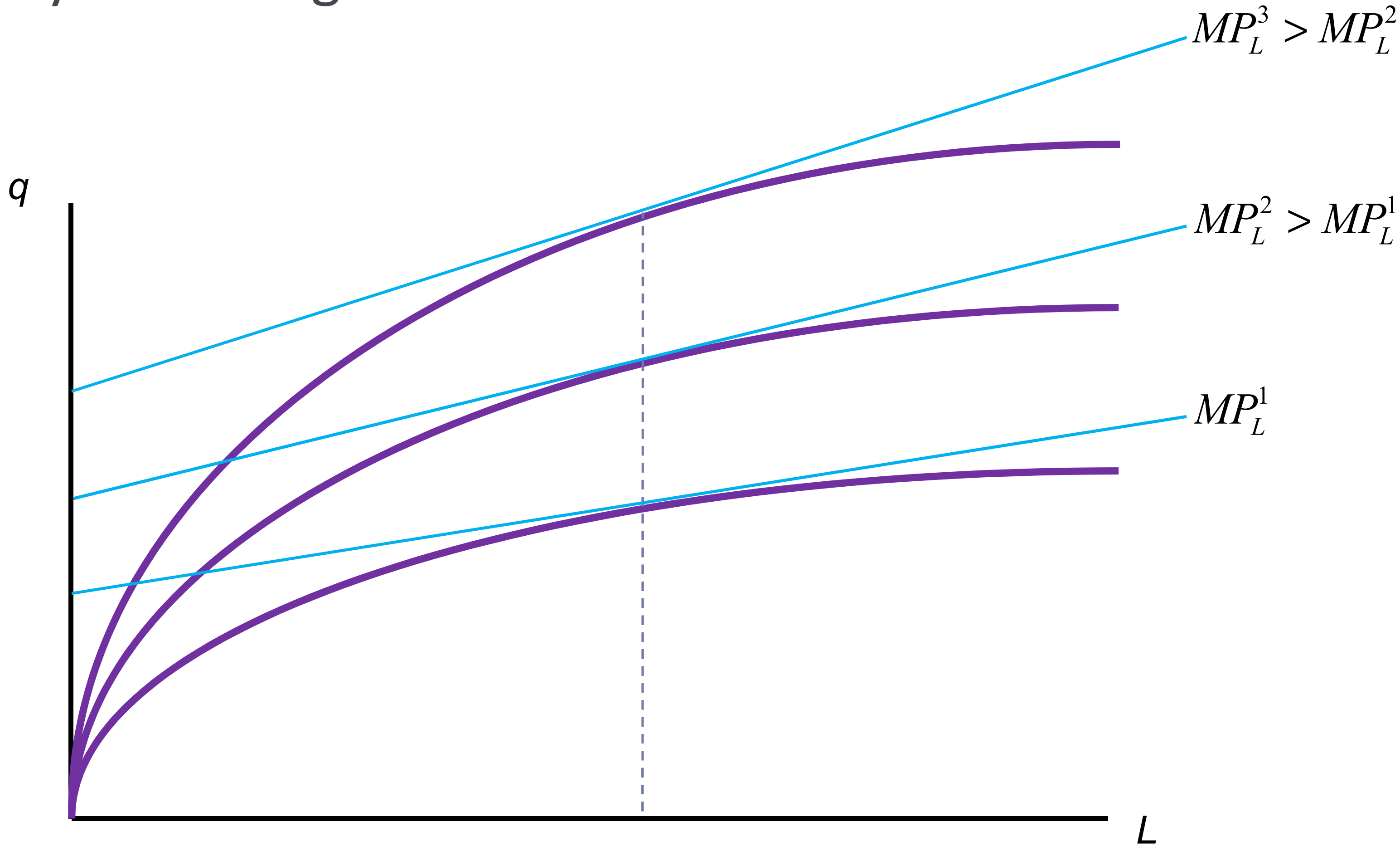


Case study – produktywność pracy

- W USA wzrost produktywności pracy zwalniał od II wojny światowej
  - 50-60: 3,4% rocznie
  - 70: 2,2%
  - 80: 1,2%
- Wzrost produktywności pracy bo:
  - Technologia (50%)
  - Wzrost ilości innych czynników produkcji (20-25%)
  - Inne

Wzrost produktywności a technologia

- Zmiany technologii



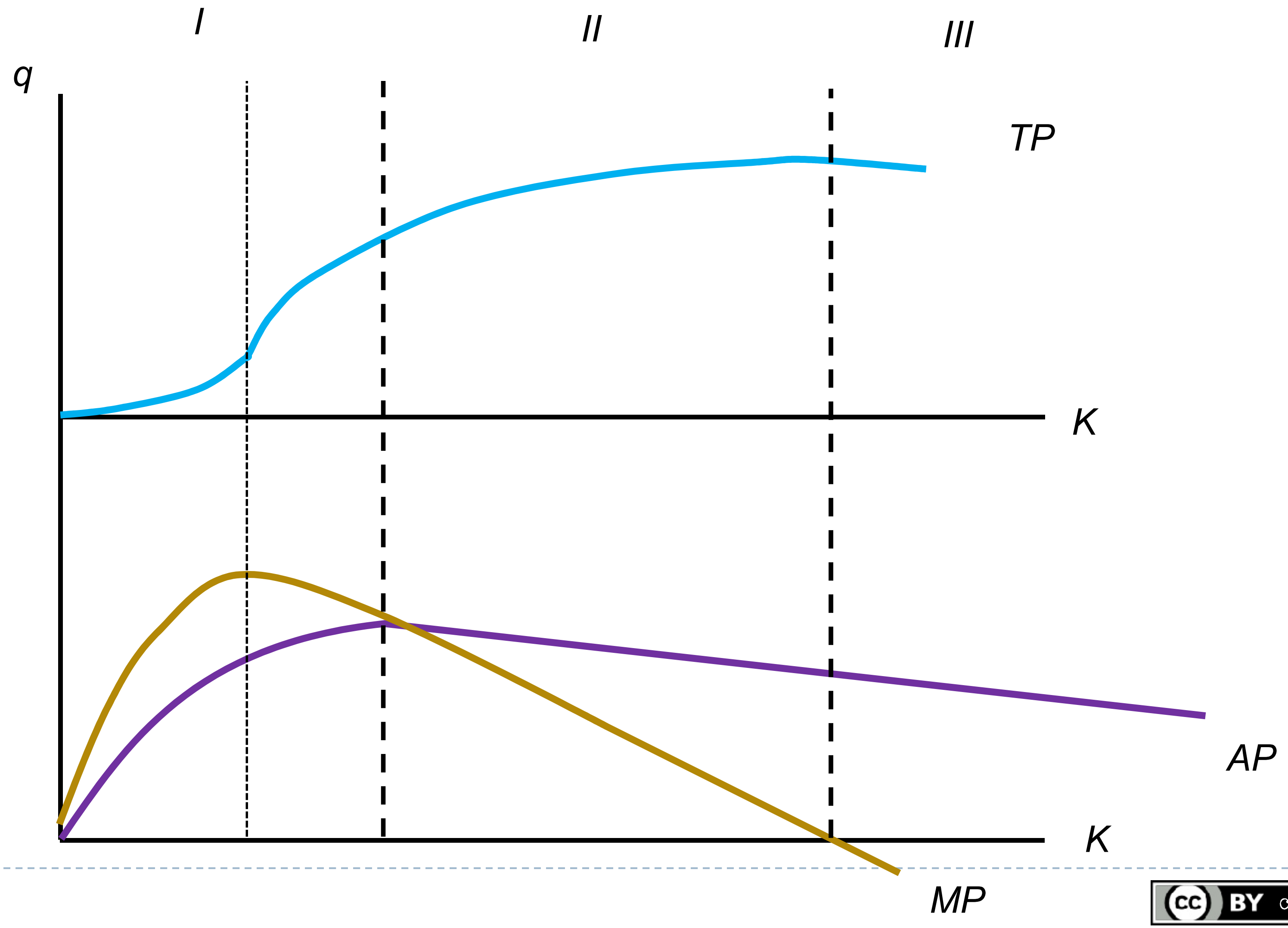
Wzrost produktywności a ilość kapitału?

- Przykład:
  - $f(K,L) = K^{0,2}L^{0,8}$
  - $MP_L = \dfrac{\partial f(K,L)}{\partial L} = 0,8K^{0,2}L^{-0,2}$
  - Załóżmy, że $L = 100$ wtedy:
    - Dla $K = 100$ $MP_L = 0,8 \cdot 100^{0,2}100^{-0,2} = 0,8$
    - Dla $K = 1000$ $MP_L = 0,8 \cdot 1000^{0,2}100^{-0,2} = 1,27$
  - Wzrost ilości kapitału na pracownika zwiększa jego krańcową produktywność

Case study – produktywność pracy

- Jest to jeszcze jedna ilustracja tego, jak działa *MP*
- Ale dlaczego MP_L rośnie coraz wolniej?
  - Spadek ilości kapitału na zatrudnionego
    - Powojenny wyż demograficzny
    - Kobiety na rynku pracy
  - Inne
    - Regulacje dotyczące BHP
    - Regulacje środowiskowe
    - Zmiana struktury wieku zatrudnionych
    - itd.

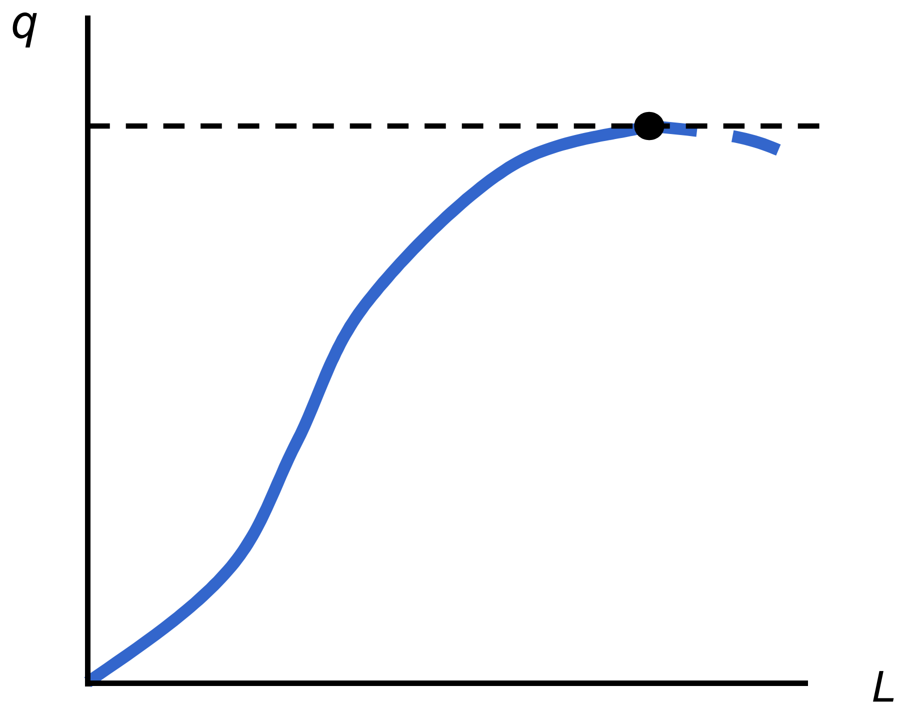
Trzy fazy funkcji produkcji



Własności funkcji produkcji

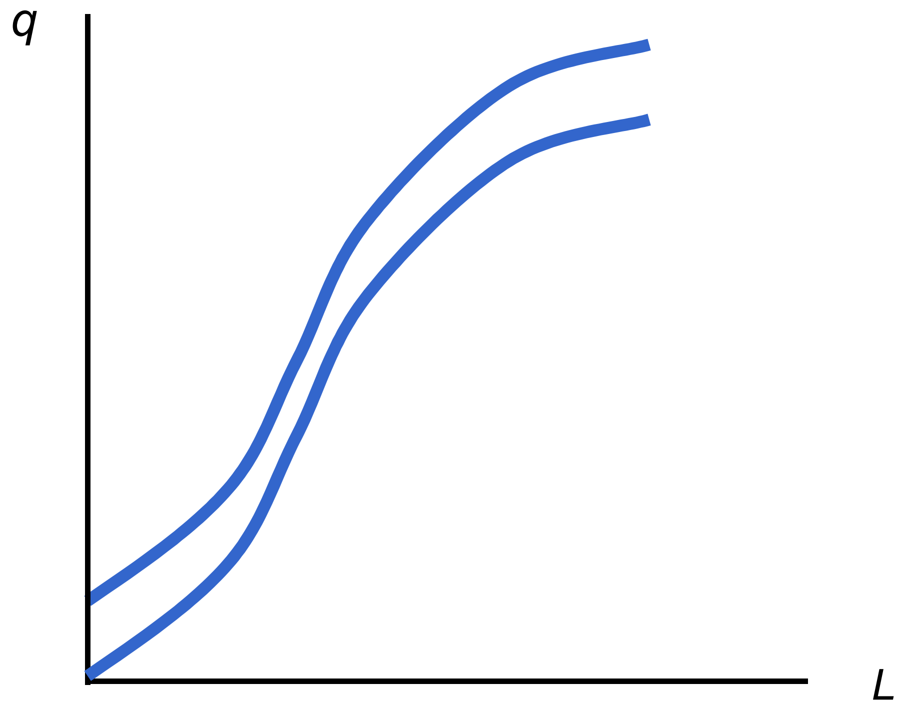
- Monotoniczność
- Swobodne dysponowanie (*free disposal*)

    (= f-cja niemalejąca)



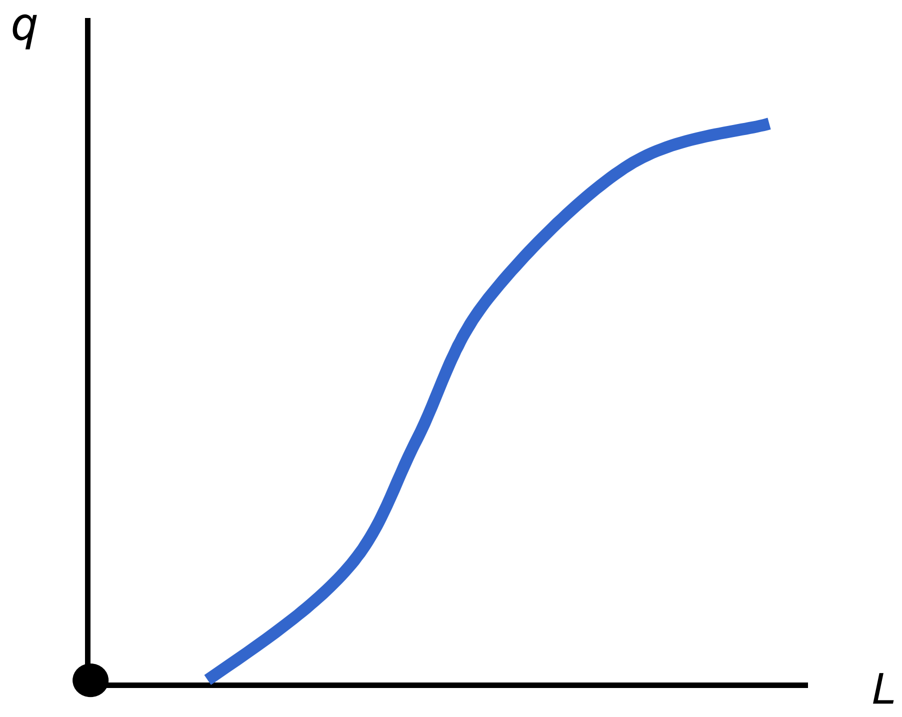
Własności funkcji produkcji

- *No free lunch*



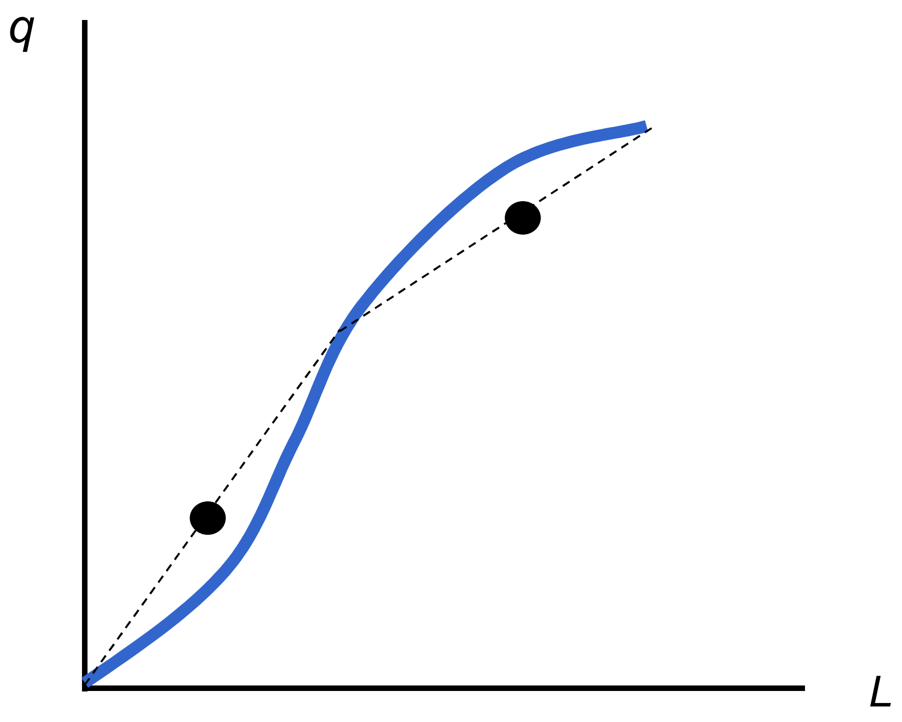
Własności funkcji produkcji

- Możliwość braku działania (*possibility of inaction*)

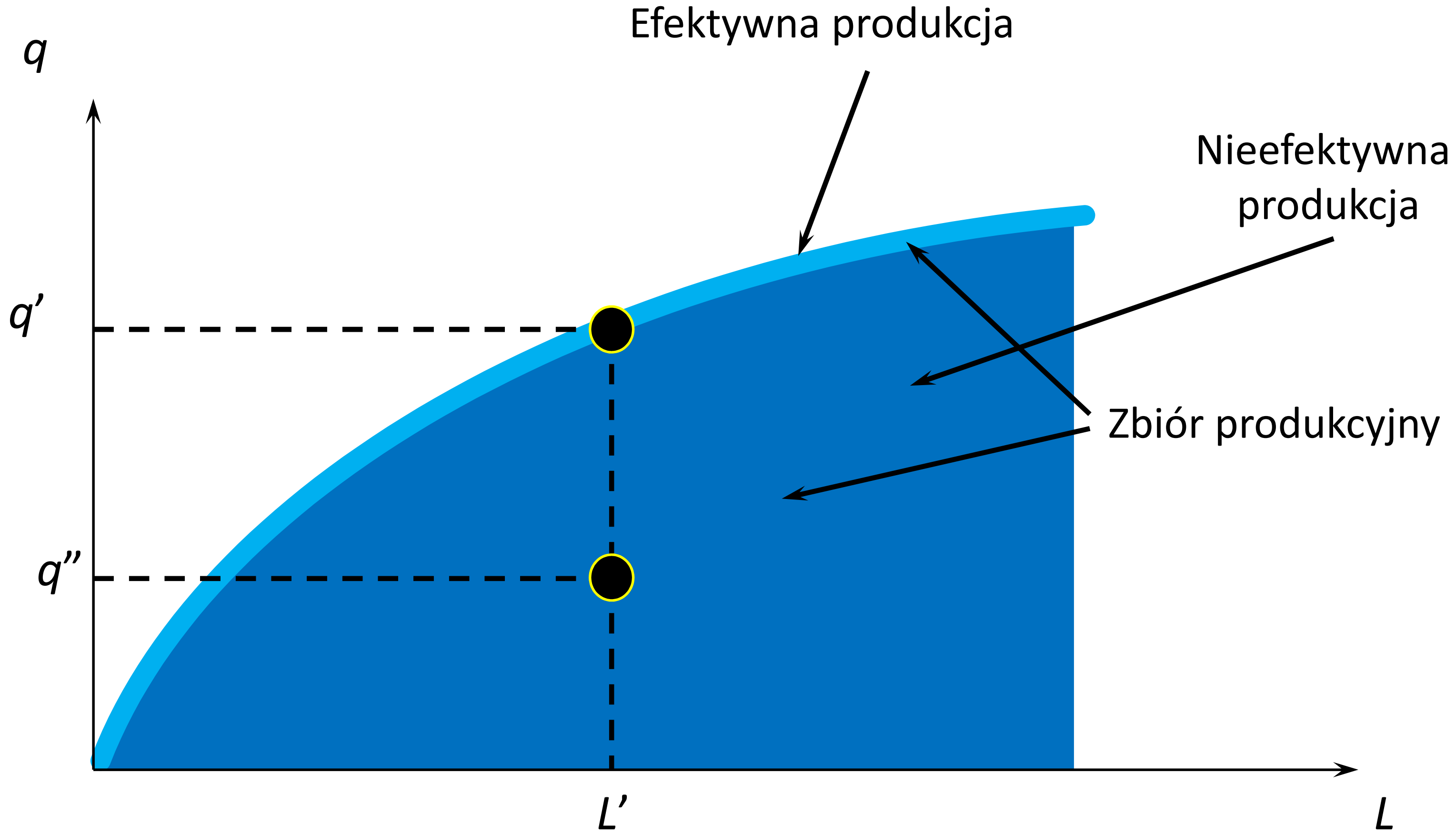


Własności funkcji produkcji

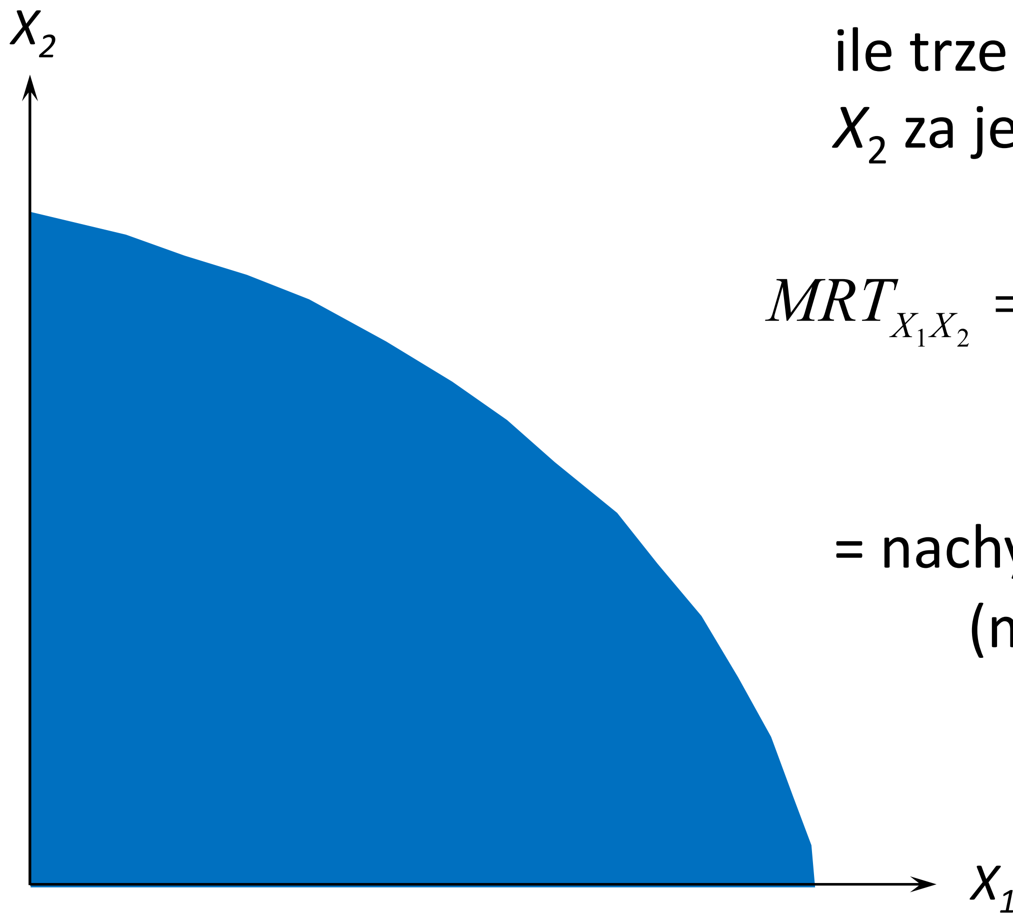
- Wypukłość (= niemalejące przychody skali)



Zbiory produkcyjne



Granica możliwości produkcyjnych



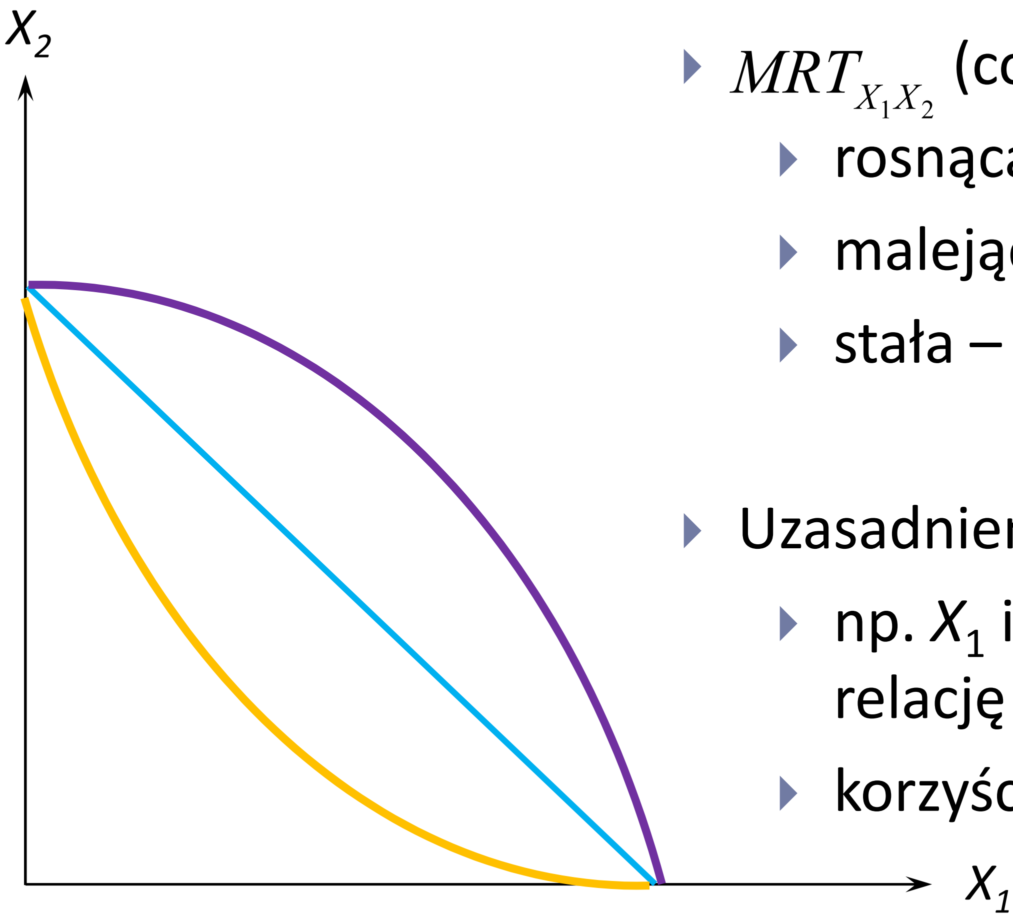
- Krańcowa stopa transformacji – ile trzeba poświęcić dobra X_2 za jednostkę X_1

$$MRT_{X_1X_2} = \frac{\Delta X_2}{\Delta X_1} = -\frac{\partial F\left(X_1, X_2\right)/\partial X_1}{\partial F\left(X_1, X_2\right)/\partial X_2}$$

= nachylenie krzywej transformacji (możliwości produkcyjnych)

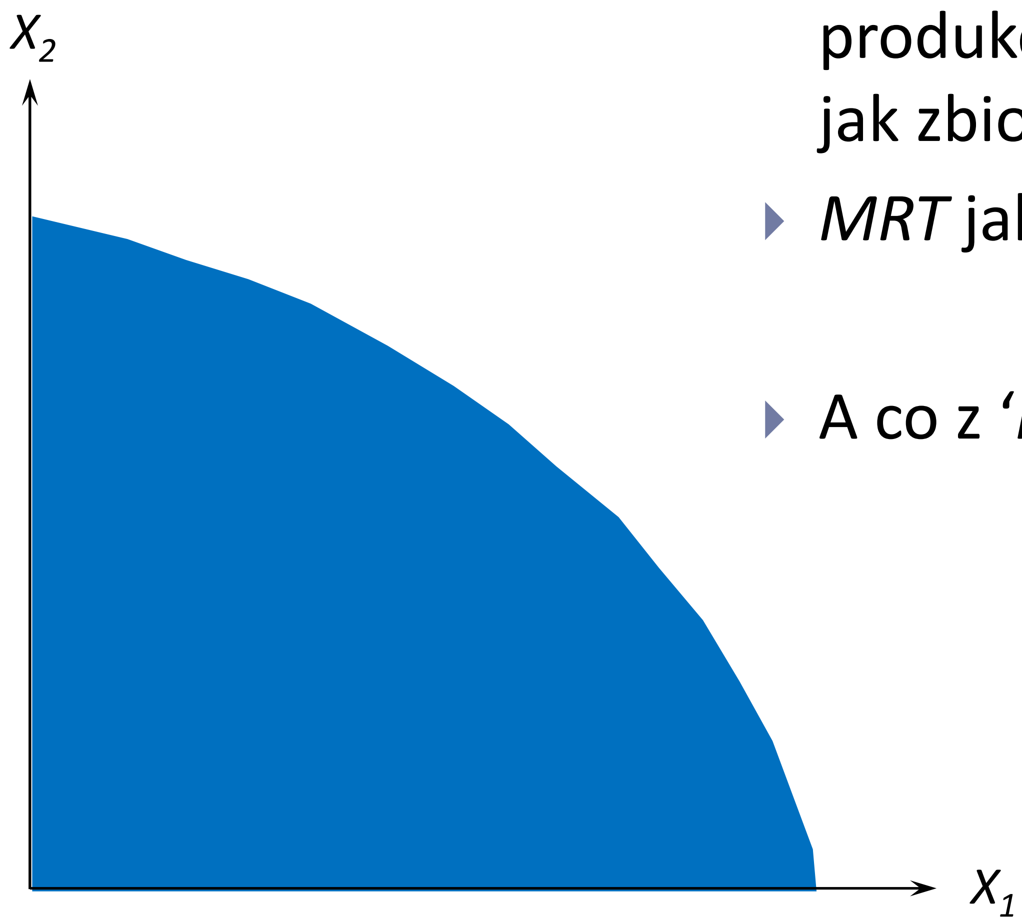
Granica możliwości produkcyjnych

- Jaki kształt granicy możliwości produkcyjnych?



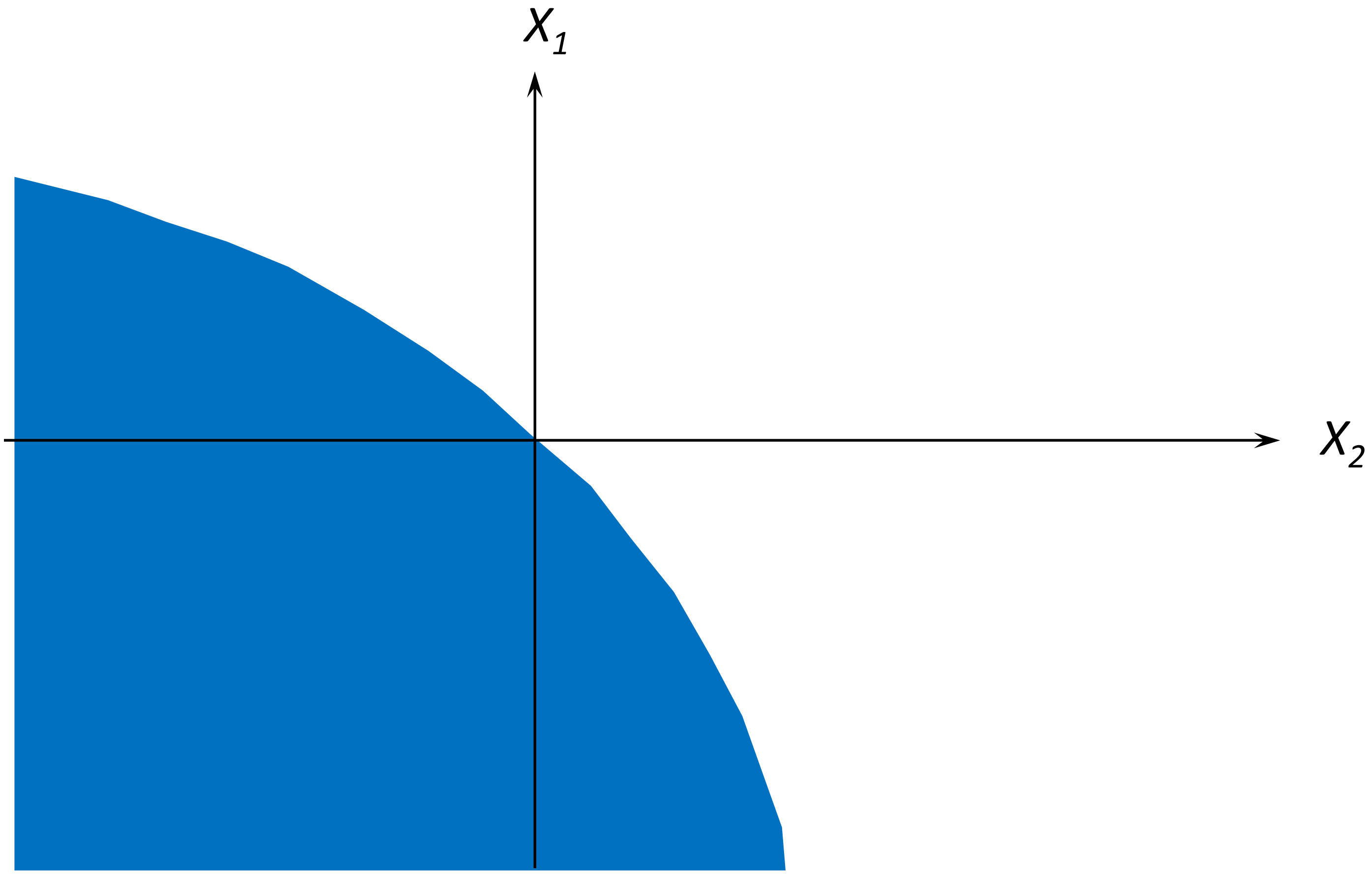
- $MRT_{X_1X_2}$ (co do wartości bezwzględnej):
  - rosnąca – krzywa wklęsła
  - malejąca – krzywa wypukła
  - stała – prosta
- Uzasadnienie:
  - np. X_1 i X_2 mają różną optymalną relację czynników produkcji
  - korzyści z zakresu

Analogia ze zbiorem produkcyjnym



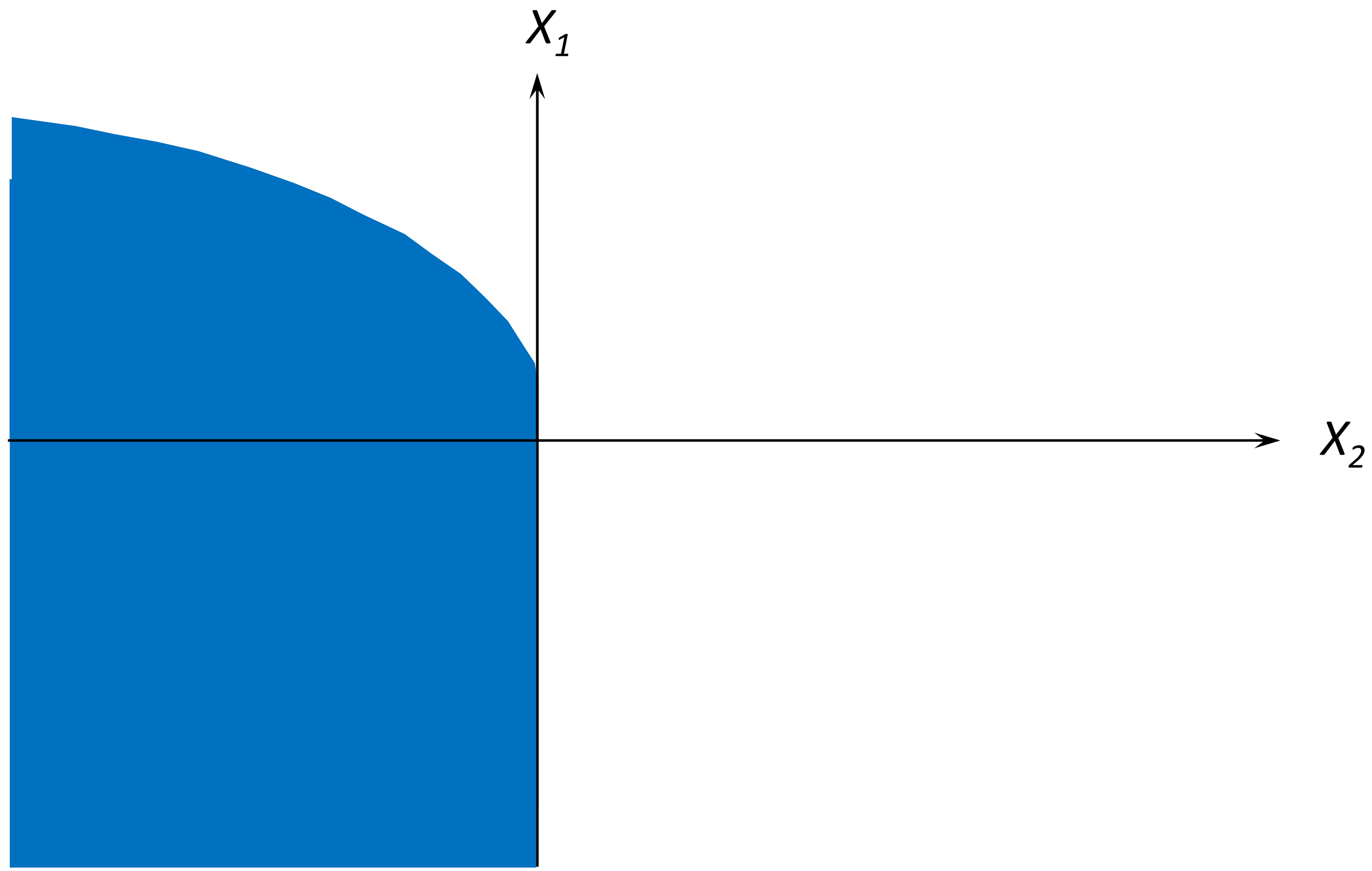
- Jeśli X_1 i X_2 to czynniki produkcji to analiza identyczna jak zbiorów produkcyjnych
- *MRT* jak *MRTS*
- A co z '*no free lunch*'?

Zbiory produkcyjne – alternatywnie



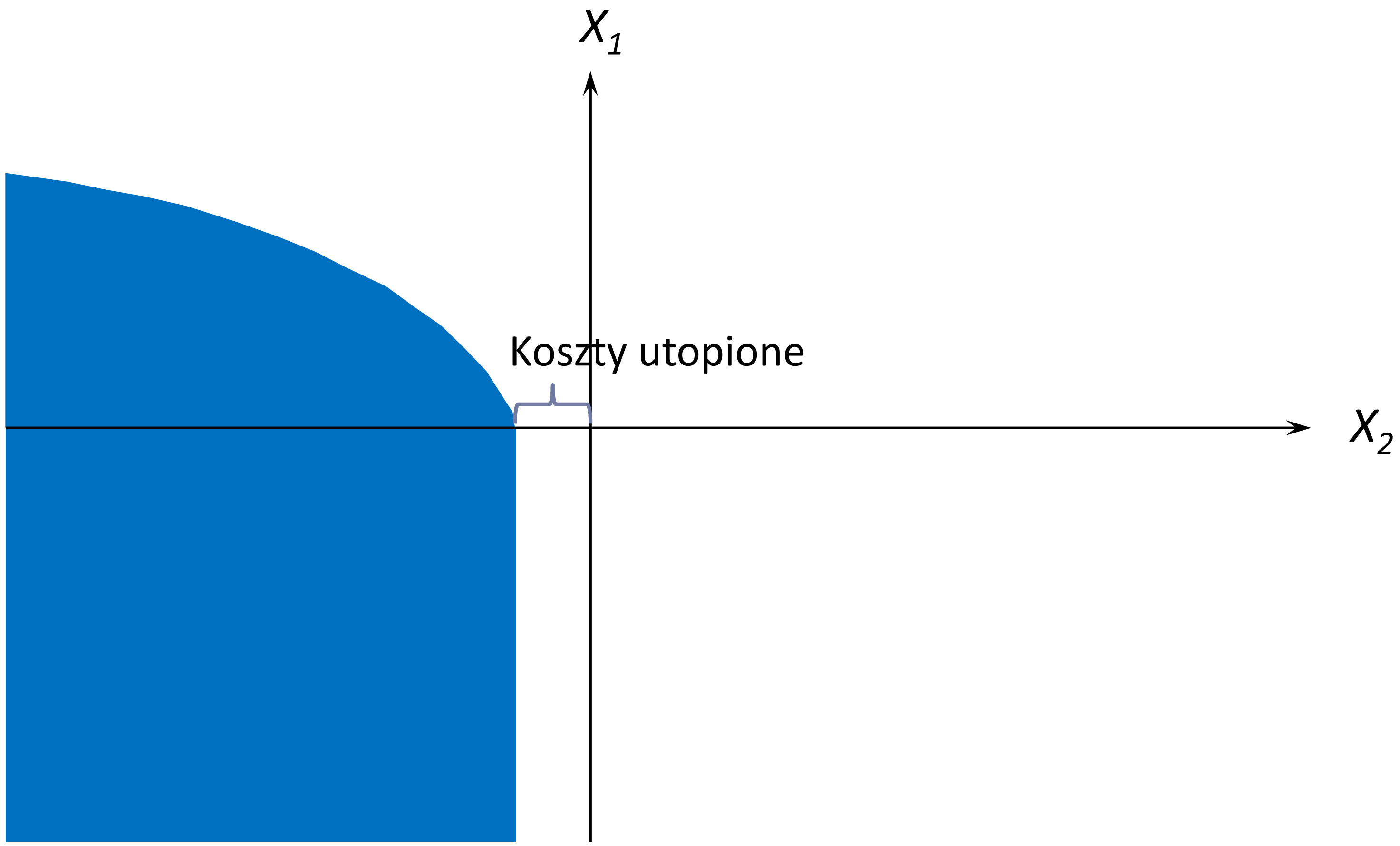
Zbiory produkcyjne – aksjomaty

- *No free lunch*



Zbiory produkcyjne – aksjomaty

- *No free lunch*



Quiz

- Prawda czy fałsz:
  1. Jeśli funkcja produkcji ma rosnące korzyści skali to izokwanty obrazujące regularne wzrosty produkcji leżą coraz rzadziej
  2. Jeśli suma wykładników funkcji produkcji typu Cobba-Douglasa jest większa od 1 to funkcja ta jest wypukła
  3. Homotetyczna funkcja produkcji reprezentuje stałe przychody skali
  4. Liniowa funkcja produkcji to przykład funkcji CES
  5. Krańcowa produktywność jednego czynnika zawsze zależy od ilości innych czynników produkcji
  6. *No free luch* oznacza, że nie da się wyprodukować czegoś z niczego

Literatura

- V: 18
- P: 6