Mikroekonomia B.4

Mikołaj Czajkowski

Minimalizacja kosztów

- Minimalizacja kosztów (przy zadanej wielkości produkcji)
  - Pozwala wyprowadzić funkcję *TC* i rozwiązać problem maksymalizacji zysków wykorzystując tylko jedną zmienną (q)
  - W długim okresie można zmienić ilości wszystkich nakładów
  - Ile czynników zatrudnić, żeby najtaniej wyprodukować daną ilość?
    - Graficznie – która kombinacja czynników na izokwancie najtańsza?
    - Analitycznie – minimalizacja kosztów przy ograniczeniu

Ceny czynników produkcji

- Czynniki produkcji – ceny (stałe)
  - Kapitał
    - Jeśli wynajęcie – koszt wynajęcia za jednostkę – *r* (*rent*)
    - Jeśli zakup – stopa procentowa + deprecjacja
      - Stopa procentowa – koszt alternatywny (pieniądze można zainwestować inaczej)
      - Deprecjacja – kapitał z czasem traci na wartości
      - Przykład:

        Mieszkanie w bloku z wielkiej płyty
        Koszt mieszkania (60 m^2) = 400 000 PLN
        Utracone oprocentowanie (5%) – inflacja (1%) = 4%
        Deprecjacja (zał. trwałość bloku 50 lat) = 2% rocznie
        Razem koszt: 6%
        Razem koszt posiadania w pierwszym roku: $400000 \cdot (0,04+0,02) = 24000$
  - Praca – wynajęcie za jednostkę – *w* (*wage*)

Izokoszta

- Pokazuje wszystkie kombinacje czynników produkcji, które łącznie kosztują tyle samo
- Np. jeśli jedynymi czynnikami kapitał i praca to:

$$TC = rK + wL$$

- Dla różnych wartości *TC* równanie będzie wskazywać inne kombinacje czynników

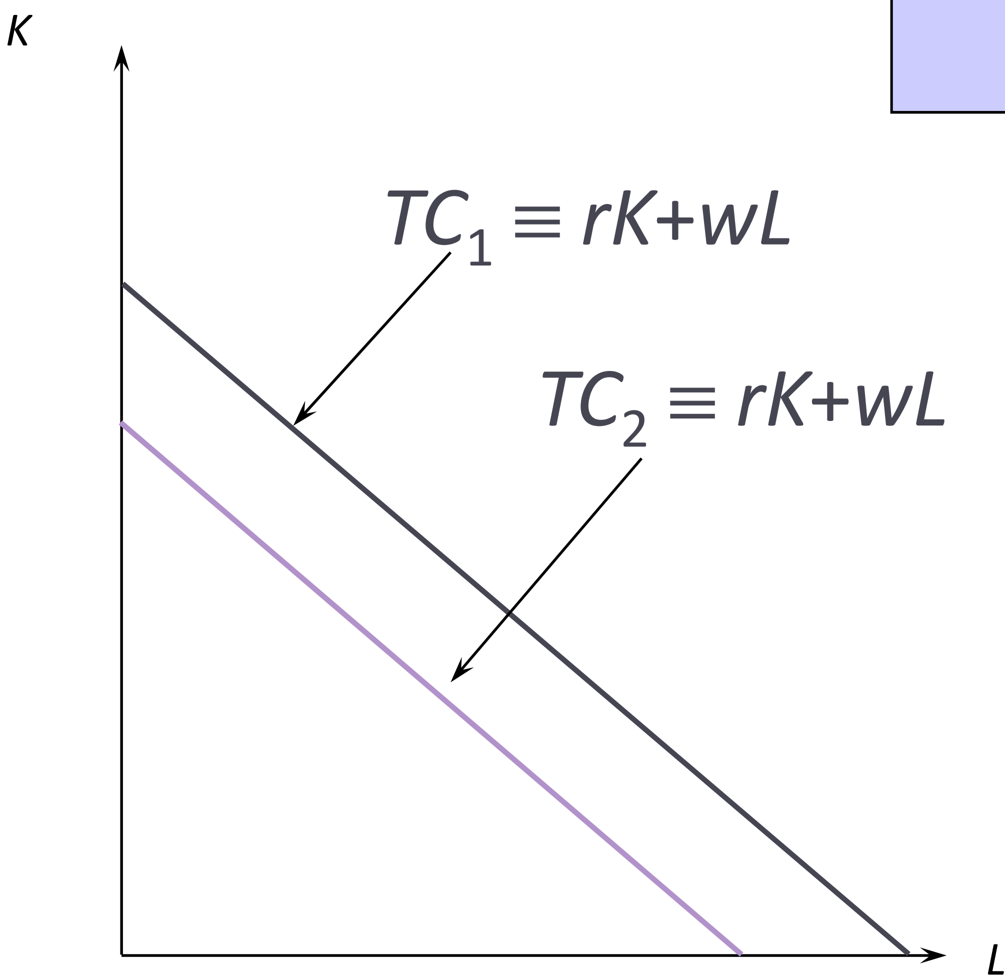
Nachylenie izokoszty

- Przekształcając równanie izokoszty (na osi pionowej *K*):

$$K = \frac{TC}{r} - \frac{w}{r}L$$

- Więc nachylenie izokoszty to $-\frac{w}{r}$
- ‘W jaki sposób kapitał można zastępować pracą bez zmiany kosztów’

Izokoszta



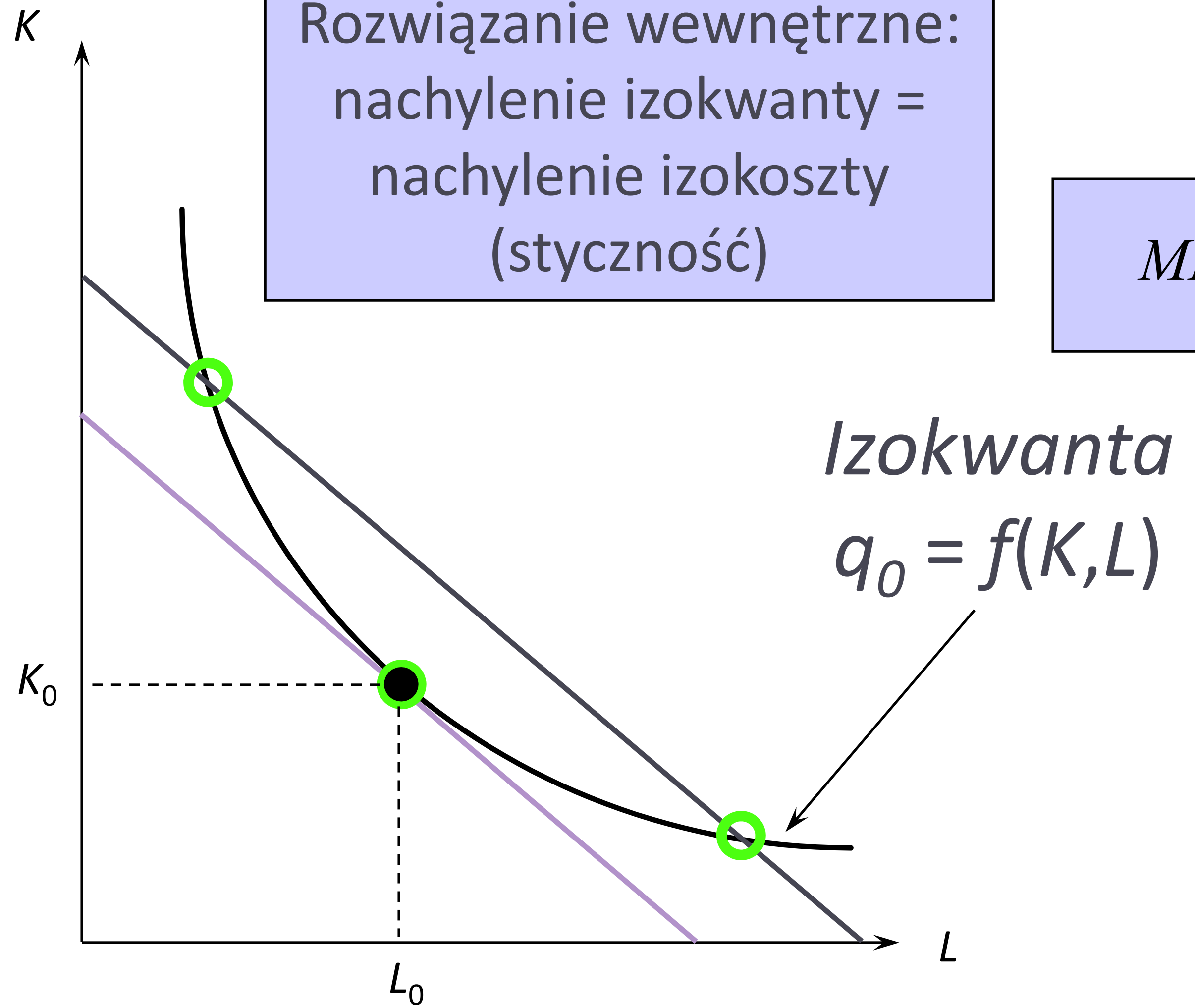
$TC_1 > TC_2$

Nachylenie $= -\frac{w}{r}$

Minimalizacja kosztów – graficznie

Rozwiązanie wewnętrzne: nachylenie izokwanty = nachylenie izokoszty (styczność)

$$MRTS_{LK} = -\frac{w}{r}$$



Minimalizacja kosztów – rozwiązanie wewnętrzne

- Wniosek:
  - Jeśli rozwiązanie wewnętrzne, to:

$$MRTS_{LK} = -\frac{w}{r}$$

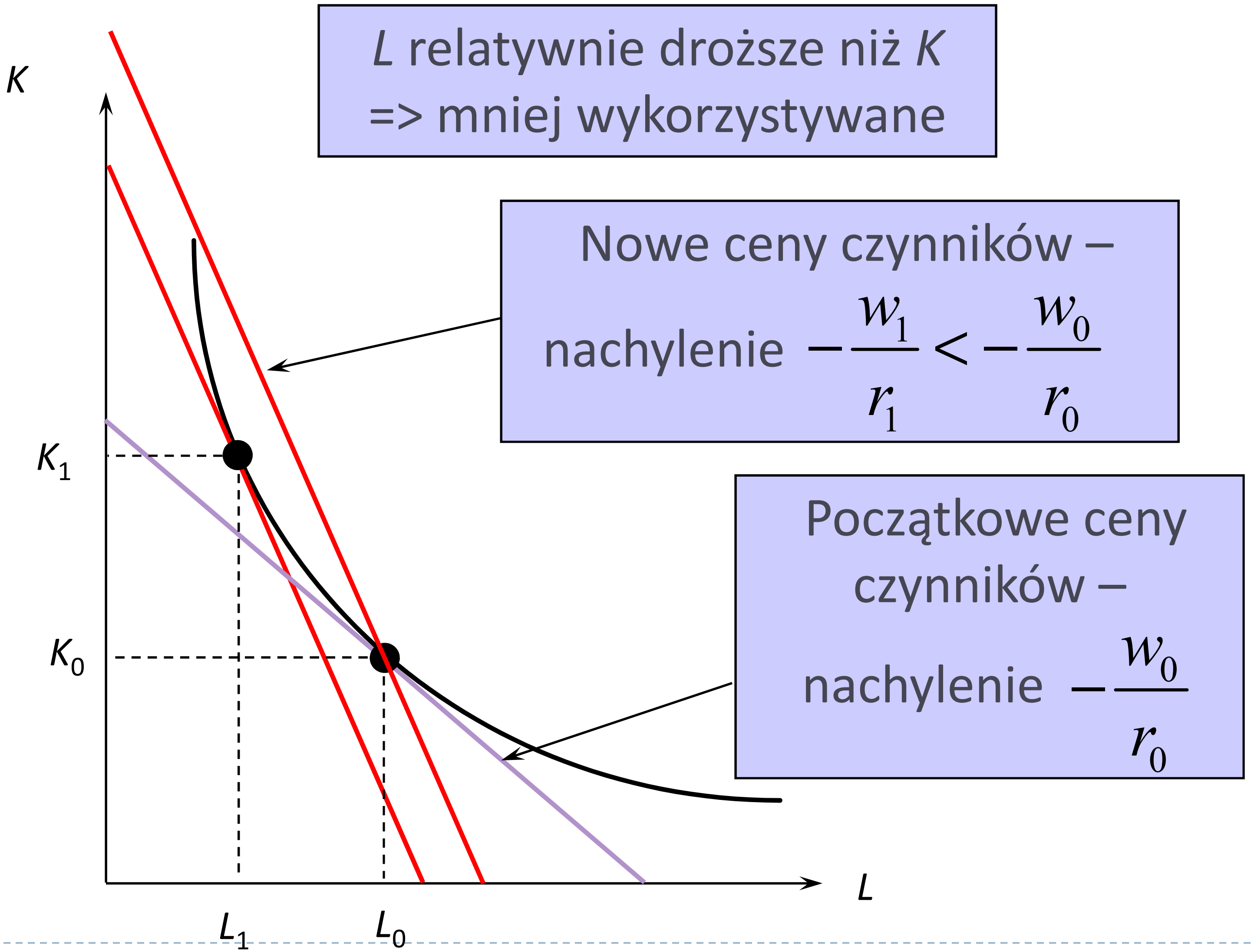
$$-\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{w}{r}$$

$$\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$

Minimalizacja kosztów – rozwiązanie wewnętrzne

- $$\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$
- Przykład:
  - w = 10 PLN, r = 20 PLN
  - Którego czynnika producent zatrudni więcej?
  - Zależy od krańcowych produktywności …
  - Zakładając, że $MP_L(L)$ ma taką samą postać jak $MP_K(K)$ i obie malejące:
    - Wybierając czynnik, którego kolejną jednostkę chcemy zatrudnić bierzemy zawsze ten, dla którego *MP*/koszt jest aktualnie większa
      - Zwiększanie zatrudnienia czynnika obniża *MP*
      - W optimum – zatrudnimy więcej tańszego czynnika
    - Inaczej – jeśli $MP_L/w \neq MP_K/r$ to opłaca się zastępować jeden czynnik drugim
      - *MP* czynnika którego ilość zwiększamy maleje; *MP* czynnika, którego ilość zmniejszamy rośnie
      - Opłaca się zastępować jeden czynnik drugim dopóki ich krańcowa produktywność przez koszt się nie zrównają
  - A co jeśli *MP* czynników niemalejące?

Minimalizacja kosztów – graficznie
Zmiana cen czynników produkcji



Minimalizacja kosztów – zmiana cen czynników

- Izokoszta bardziej stroma $-\frac{w_1}{r_1} < -\frac{w_0}{r_0}$
- (np. rośnie koszt pracy $w_1 > w_0$)
- $$\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$
- Więc aby równanie było spełnione, relatywna ilość zatrudnienia kapitału w stosunku do pracy musi wzrosnąć (bo krańcowa produktywność malejąca)

Minimalizacja kosztów – formalnie

- Dane:
  - $q = f(K,L)$
  - w, r
  - Firma minimalizuje koszty $TC = wL + rK$

    przy ograniczeniu: $f(K,L) = q_0$

  - Metoda mnożników Lagrange'a
    (taki sam wynik dla minimalizacji kosztów dla danego q_0
    i dla maksymalizacji produkcji przy danym TC_0)

Metoda mnożników Lagrange'a

- Metoda mnożników Lagrange'a w pigułce

1. Zapisz funkcję Lagrange'a (Lagrangian)

   $$\mathscr{L}(L,K,\lambda)=wL+rK-\lambda\left(f(K,L)-q_0\right)$$

2. FOC: zróżniczkuj po wszystkich zmiennych (*L*, *K*, *λ*) i przyrównaj do 0

   $$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial L}=0,\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial K}=0,\quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \lambda}=0$$

3. Rozwiąż układ równań

Metoda mnożników Lagrange'a

$$\mathscr{L}(L,K,\lambda)=wL+rK-\lambda\left(f(K,L)-q_0\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial L}=w-\lambda\dfrac{\partial f(K,L)}{\partial L}=0 & \Leftrightarrow w=\lambda\dfrac{\partial f(K,L)}{\partial L}=\lambda MP_L\\[2ex] \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial K}=r-\lambda\dfrac{\partial f(K,L)}{\partial K}=0 & \Leftrightarrow r=\lambda\dfrac{\partial f(K,L)}{\partial K}=\lambda MP_K\\[2ex] \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial \lambda}=f(K,L)-q_0=0 & \Leftrightarrow f(K,L)=q_0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{w}{r}=\dfrac{\lambda MP_L}{\lambda MP_K}\Leftrightarrow\dfrac{MP_K}{r}=\dfrac{MP_L}{w}\\[2ex] f(K,L)=q_0\end{cases}$$

Mnożnik Lagrange'a

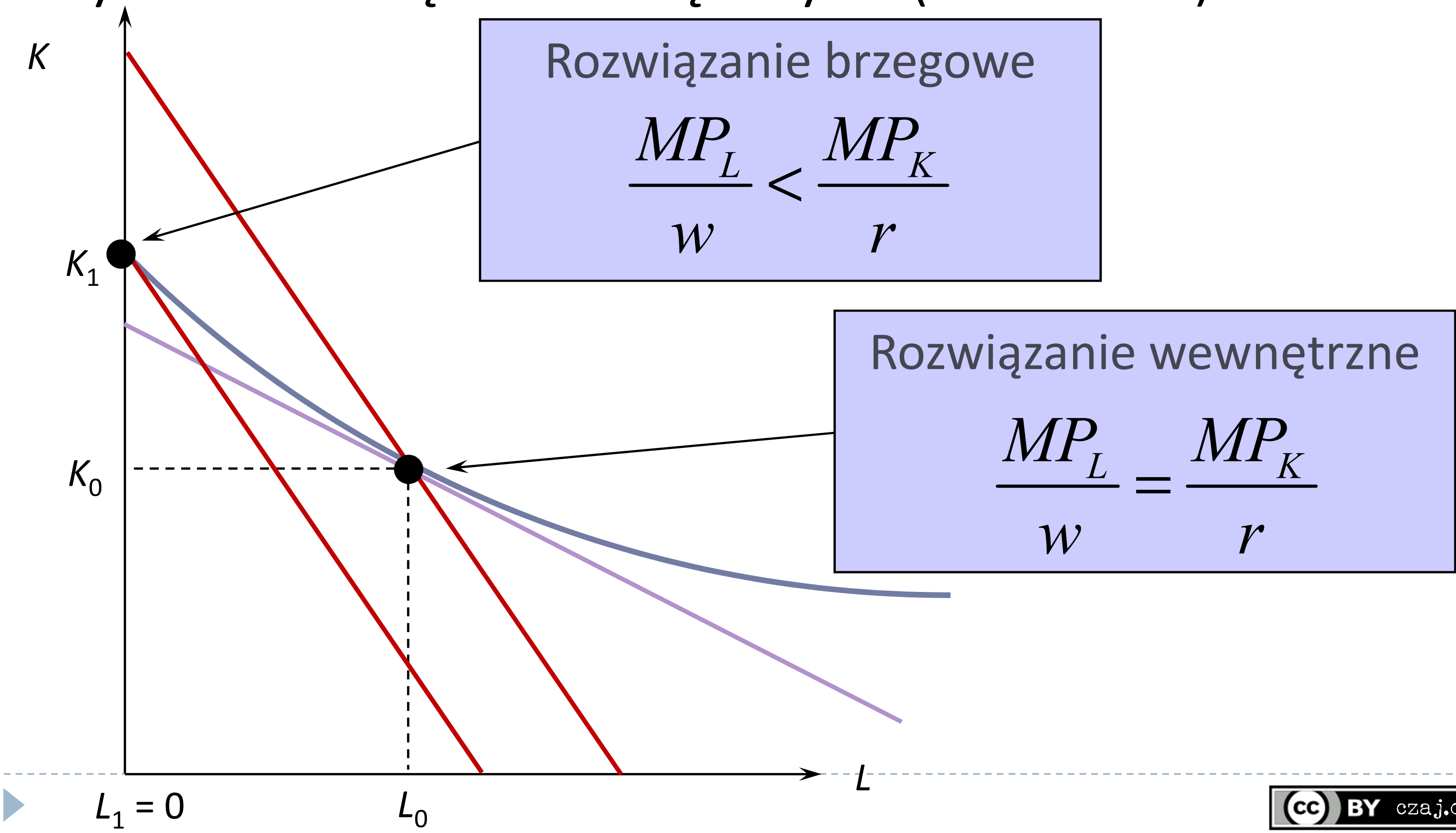
- λ – 'mnożnik Lagrange'a' – stopień, w jakim optymalne rozwiązanie funkcji celu zmienia się ze zmianą ograniczenia
  - U nas: jak można zmniejszyć koszt, jeśli krańcowo zmniejszyć produkcję
- Cena-cień (*shadow price*)

$$\mathscr{L}(L,K,\lambda) = wL + rK - \lambda\left(f(K,L) - q_0\right)$$

- Czyli krańcowy koszt zmiany wielkości produkcji

Rozwiązanie brzegowe – graficznie

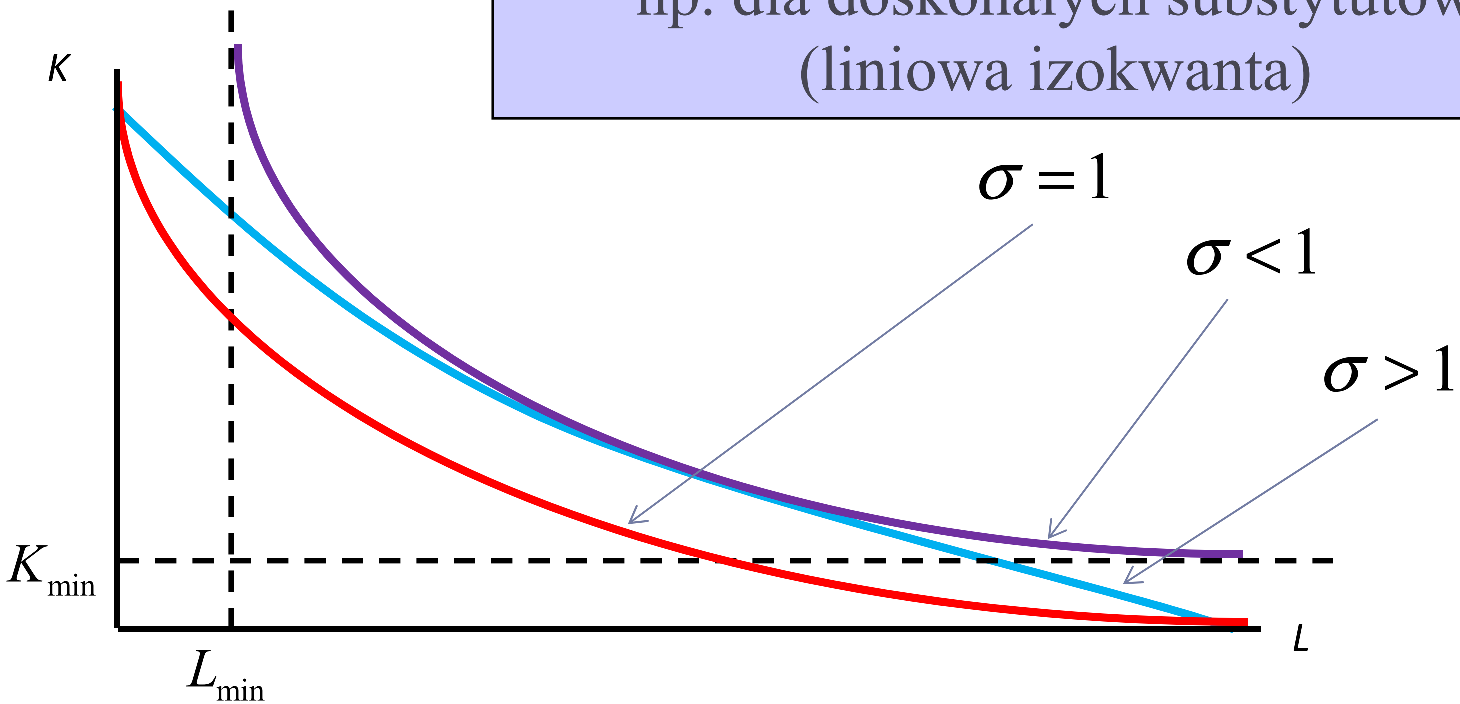
- UWAGA: warunek działa tylko dla wypukłych izokwant i tylko dla rozwiązań wewnętrznych! (*L* > 0 i *K* > 0)



Rozwiązanie brzegowe – graficznie

- Dla izokwant funkcji Cobba-Douglasa osie asymptotami, a izokwanty wypukłe, więc zawsze rozwiązanie wewnętrzne

Rozwiązanie brzegowe możliwe jeśli $\sigma > 1$
np. dla doskonałych substytutów
(liniowa izokwanta)



Metoda mnożników Lagrange'a – przykład

- Funkcja produkcji Cobba-Douglasa $q = K^{0,2}L^{0,8}$
- Ceny czynników produkcji: *w* = 10, *r* = 2
- Ile zatrudnić czynników produkcji, aby minimalizując koszty wyprodukować *q* = 100 jednostek?
- Minimalizujemy 2*K* + 10*L* przy ograniczeniu $K^{0,2}L^{0,8} = 100$
- $\mathscr{L}(L,K,\lambda) = 10L + 2K - \lambda\left(K^{0,2}L^{0,8} - 100\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}(L,K,\lambda)}{\partial L} = 10 - \lambda\left(0,8K^{0,2}L^{-0,2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}(L,K,\lambda)}{\partial K} = 2 - \lambda\left(0,2K^{-0,8}L^{0,8}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}(L,K,\lambda)}{\partial \lambda} = -K^{0,2}L^{0,8} + 100 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{10}{2} = \dfrac{0,8K^{0,2}L^{-0,2}}{0,2K^{-0,8}L^{0,8}} = \dfrac{MP_L}{MP_K} \\ K^{0,2}L^{0,8} = 100 \end{cases}$$

Metoda mnożników Lagrange'a – przykład

$$\begin{cases} 5 = \dfrac{4K}{L} \\ K^{0,2}L^{0,8} = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{4}{5}K \\ K^{0,2}\left(\dfrac{4}{5}K\right)^{0,8} = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = \dfrac{100}{(0,8)^{0,8}} = 119,54 \\ L = \dfrac{4}{5}K = 95,63 \end{cases}$$

Zużywamy więcej tego czynnika, którego krańcowa produktywność w stosunku do jego ceny jest relatywnie większa

$$q = K^{0,2}L^{0,8}$$

$$r = 2, \quad w = 10$$

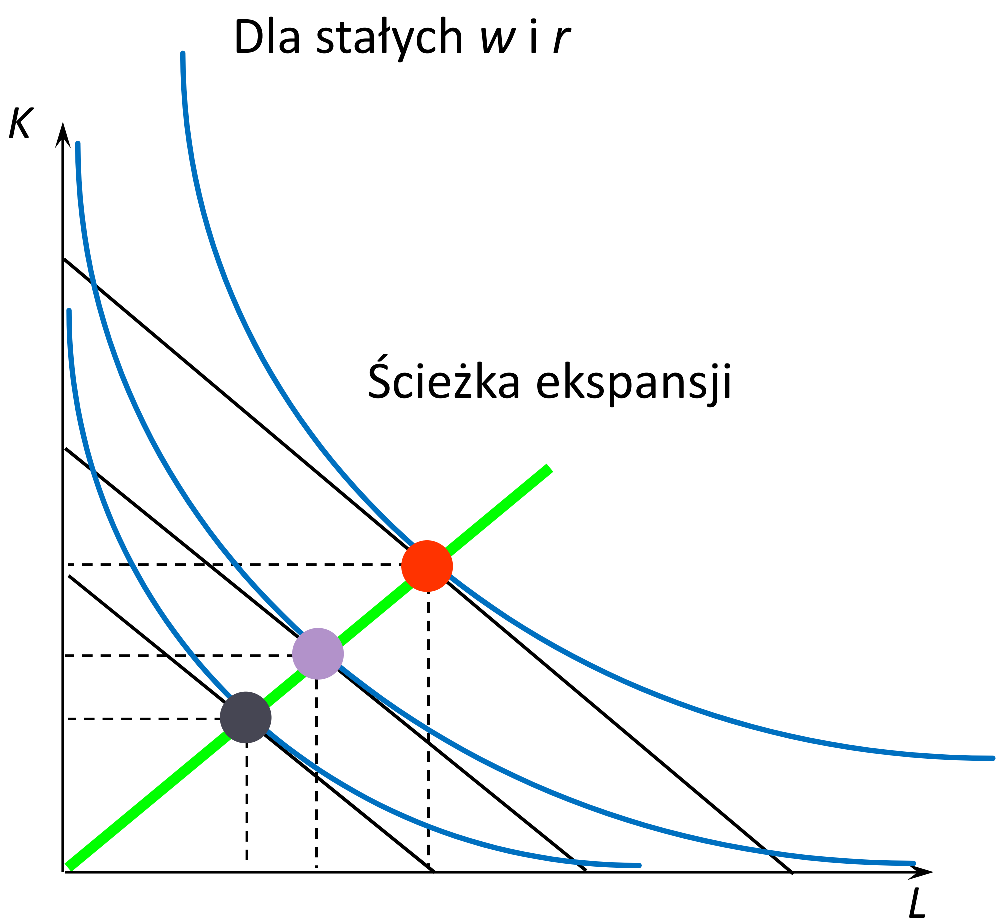
Popyty warunkowe na czynniki produkcji

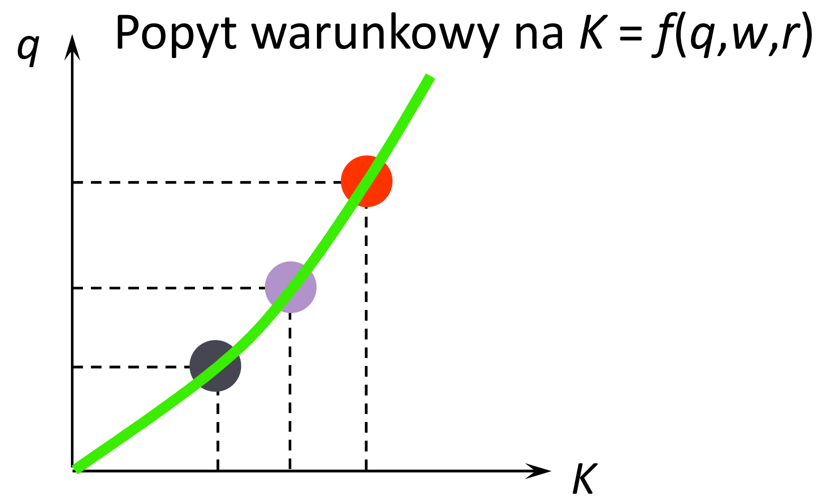
- Dla każdego zestawu *q*, *w*, *r* możemy obliczyć minimalizujące koszty wielkości *K* i *L*
- Wielkości *K* i *L* można więc wyrazić, jako funkcje zmiennych *q*, *w*, *r*
- Popyt warunkowy firmy na czynniki produkcji

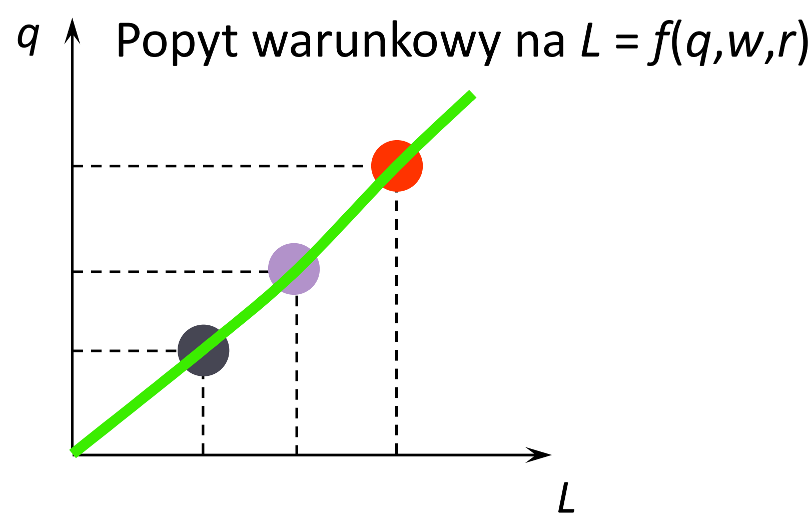
$$\begin{cases} K^{\alpha}L^{\beta}=q \\ \dfrac{MP_L}{w}=\dfrac{MP_K}{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} K^{\alpha}L^{\beta}=q \\ \dfrac{\beta K}{w}=\dfrac{\alpha L}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} K=\dfrac{\alpha w}{\beta r}L \\ L=\dfrac{\beta r}{\alpha w}K \end{matrix}$$

$$\begin{cases} K^{\alpha}L^{\beta}=q \\ \dfrac{\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}}{w}=\dfrac{\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha w}{\beta r}L\right)^{\alpha}L^{\beta}=q \quad \Leftrightarrow \quad L=q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\dfrac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\ K^{\alpha}\left(\dfrac{\beta r}{\alpha w}K\right)^{\beta}=q \quad \Leftrightarrow \quad K=q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\dfrac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \end{cases}$$

Popyty warunkowe – graficznie

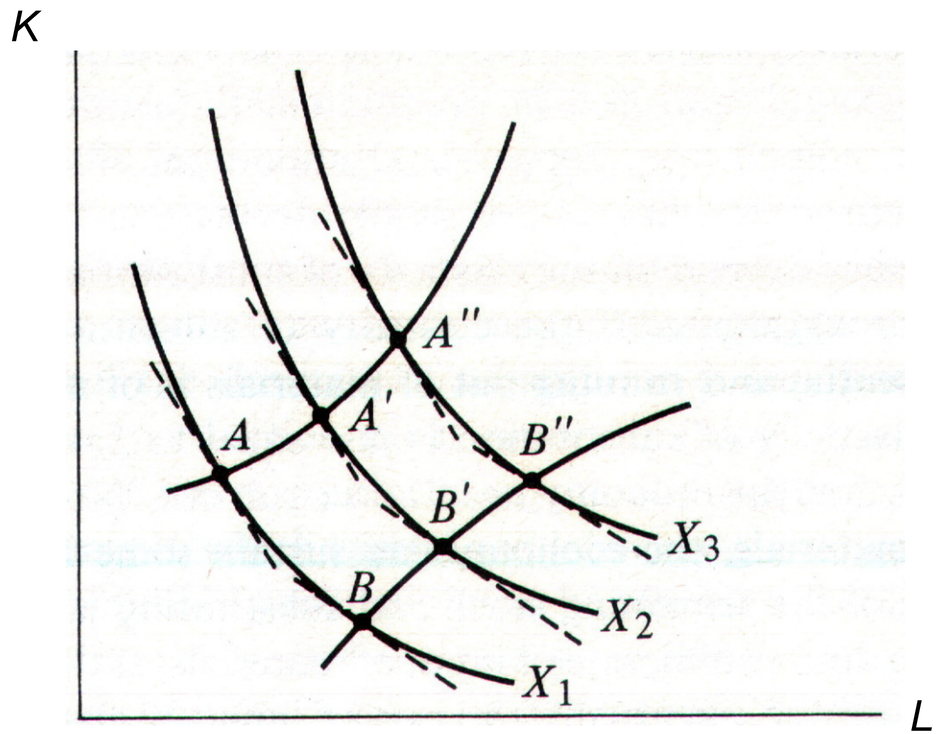






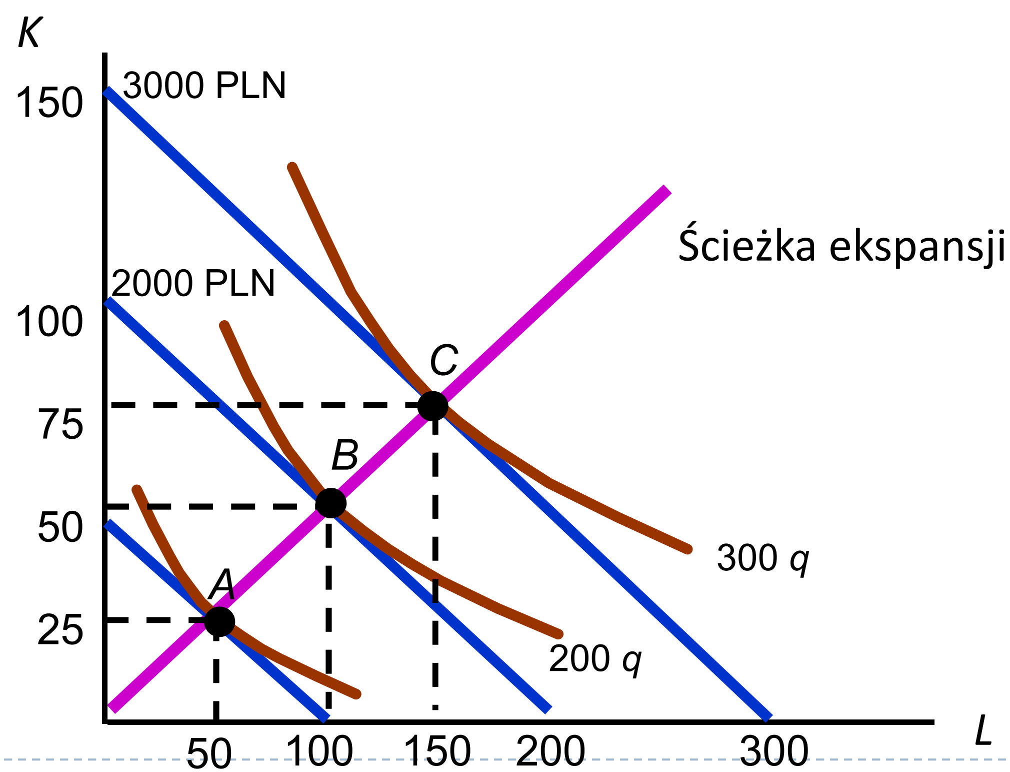
Ścieżka ekspansji

- Pokazuje najtańsze kombinacje czynników produkcji pozwalających na osiągnięcie danej produkcji
- Izoklina dla aktualnej relacji cen czynników produkcji



Ścieżka ekspansji

- Niesie tę samą informację, co długookresowa krzywa *TC*
  - Każdy punkt styczności izokwanty z minimalną izokosztą determinuje koszt danej wielkości produkcji

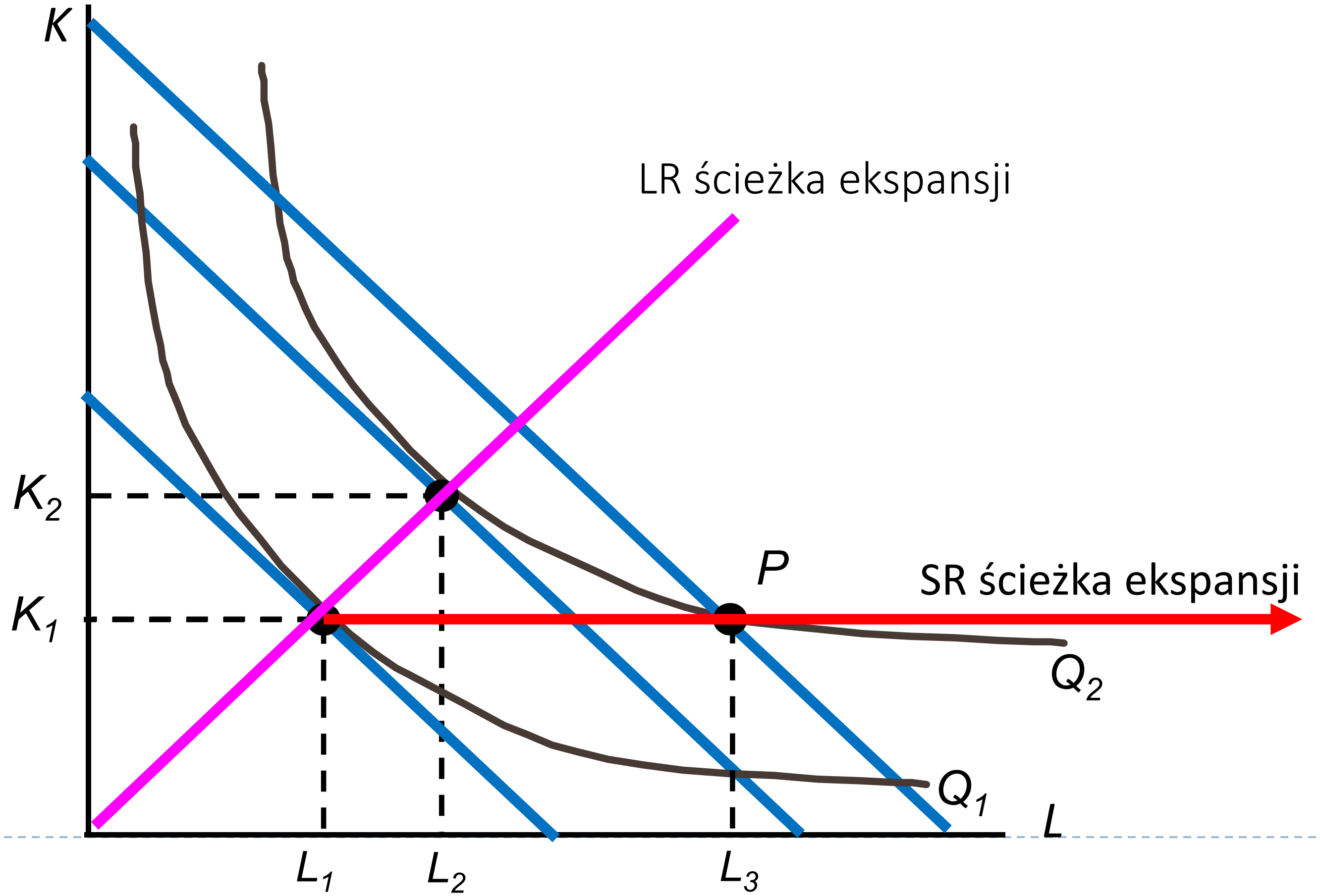


Nachylenie

$$\frac{dK}{dL}$$

Ścieżka ekspansji w krótkim okresie

- SR – niektóre czynniki stałe
- LR – wszystkie czynniki zmienne

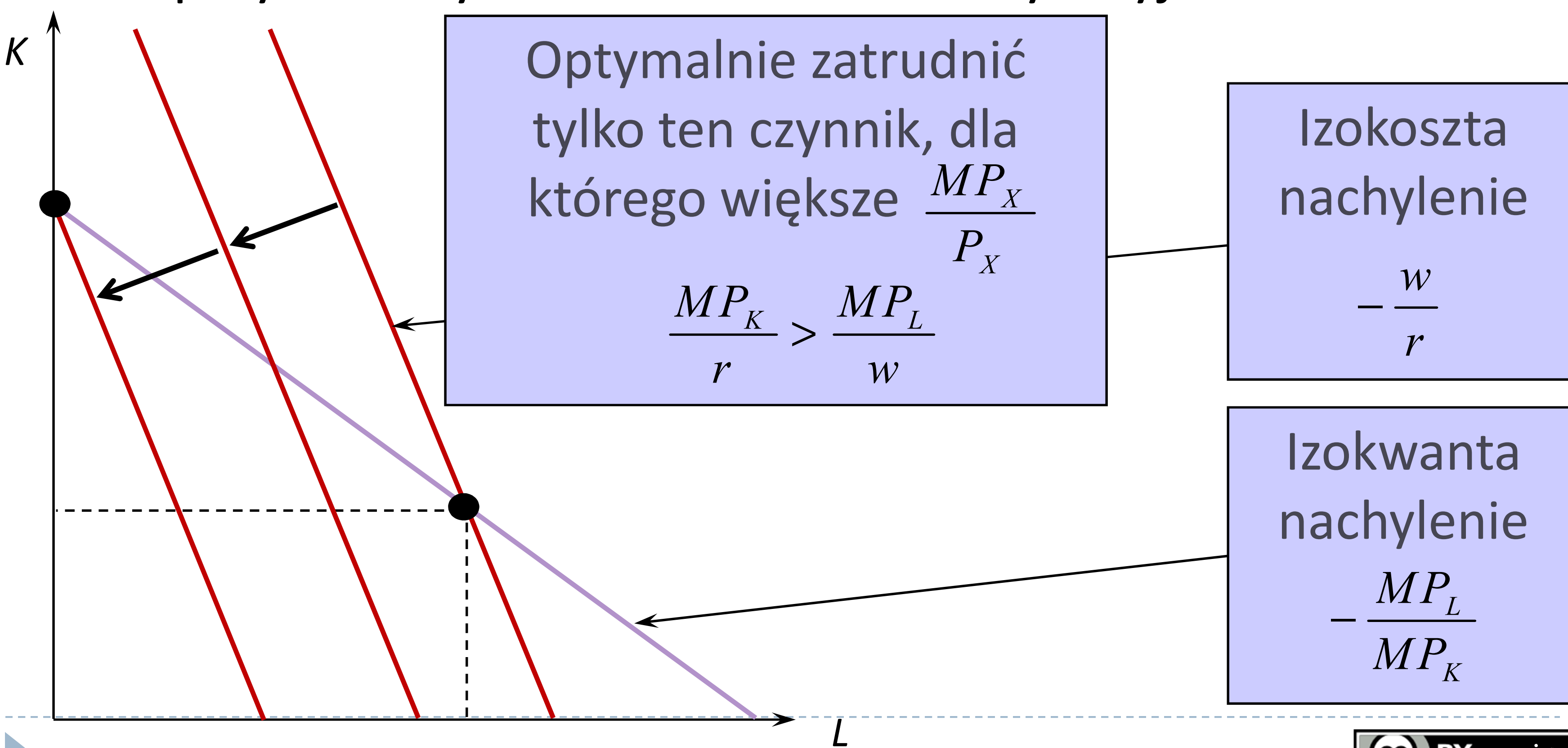


Ścieżka ekspansji w krótkim i długim okresie

- *SRTC* przewyższa *LRTC*, dla danego *q*, z wyjątkiem punktu, w którym krótkookresowe ograniczenie ilości stałego czynnika jest jednocześnie optymalnym długookresowym wyborem jego ilości
- Więc *LRTC* ma zawsze przynajmniej jeden punkt wspólny z każdą *SRTC*

Typowe rozwiązania brzegowe

- Rozwiązanie brzegowe możliwe np. gdy $\sigma > 1$ (żaden czynnik nie jest ‘niezbędny’)
- Na przykład czynniki doskonale substytucyjne



Typowe rozwiązania brzegowe

- Jeśli czynniki to doskonałe substytuty to firma zatrudni ten, którego krańcowa produktywność w stosunku do ceny większa
- Podobnie dla innych rozwiązań brzegowych

Typowe rozwiązania brzegowe

- Dla czynników doskonale substytucyjnych $f\left(K,L\right)=\alpha K+\beta L$
- Popyty warunkowe: $$\begin{cases} \dfrac{MP_K}{r} > \dfrac{MP_L}{w} & \Rightarrow \quad K = \dfrac{q}{\alpha},\ L = 0 \\ \dfrac{MP_K}{r} < \dfrac{MP_L}{w} & \Rightarrow \quad K = 0,\ L = \dfrac{q}{\beta} \\ \dfrac{MP_K}{r} = \dfrac{MP_L}{w} & \Rightarrow \quad q = \alpha K + \beta L \end{cases}$$
- Koszt całkowity: $$\begin{cases} TC = rK = \dfrac{r}{\alpha} q \quad \text{dla} \quad \dfrac{MP_K}{r} \geq \dfrac{MP_L}{w} \\ TC = wL = \dfrac{w}{\beta} q \quad \text{dla} \quad \dfrac{MP_K}{r} \leq \dfrac{MP_L}{w} \end{cases}$$

Case study – dyskryminacja kobiet

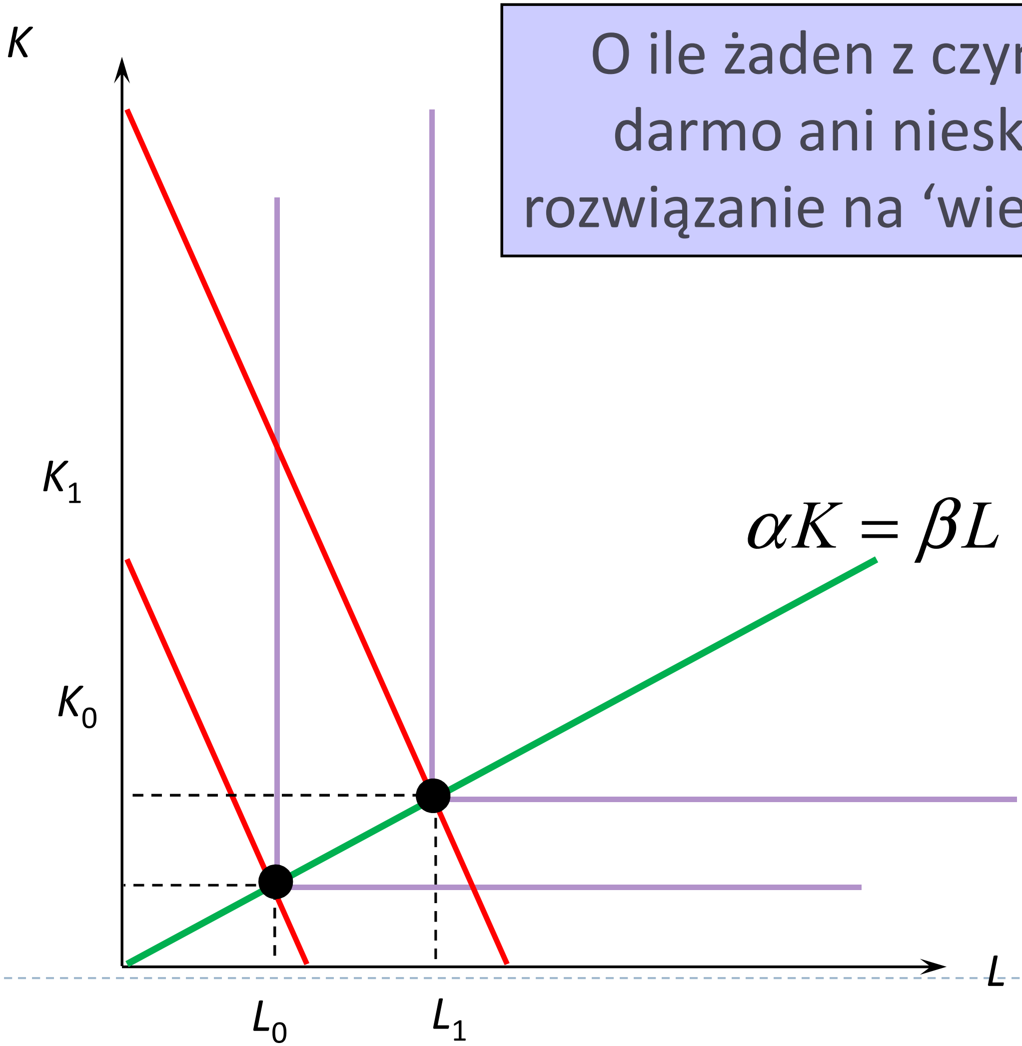
- http://czaj.org/pub/teaching/B/b4a1.wmv
- Kobiety i mężczyźni na rynku pracy
  - Zał. 1: Kobiety i mężczyźni = doskonałe substytuty
  - Zał. 2: Produktywność kobiet i mężczyzn taka sama
  - Co powinien robić minimalizujący koszty pracodawca?
    - Izokwanty – proste o nachyleniu -1
    - Jeśli płace takie same to nie ma znaczenia kogo zatrudnić
    - Jeśli płace kobiet niższe to minimalizujący koszty pracodawca zatrudni tylko kobiety
      - W efekcie ‘popyt na kobiety’ rośnie, cena rośnie

Case study – dyskryminacja kobiet

- Empirycznie – płace kobiet niższe
  - Wyjaśnienie ‘*à la* Pieńkowska’:
    - Kobiety dyskryminowane przez firmy (firmy nie minimalizują kosztów)
    - ‘Cena’ kobiet niższa niż mężczyzn, ale dyskryminujący pracodawca zatrudni kobietę tylko jeśli różnica w pensji przewyższa ‘wartość’ dyskryminacji
    - => Firmy nie minimalizją kosztów?
  - Wyjaśnienie ‘*à la* Korwin-Mikke’:
    - Mężczyźni i kobiety różni => mają różne przewagi komparatywne w różnych zawodach
    - => Różna produktywność?
    - => Brak substytucyjności?
- Empirycznie – różny udział kobiet i mężczyzn w różnych zawodach
  - http://czaj.org/pub/teaching/B/b4a2.png

Typowe rozwiązania brzegowe

- Dla czynników komplementarnych $f(K,L)=\min\{\alpha K,\beta L\}$



O ile żaden z czynników nie jest za darmo ani nieskończenie drogi – rozwiązanie na ‘wierzchołku’ izokwanty

Popyt warunkowy na *K* to $K=\dfrac{q}{\alpha}$

Popyt warunkowy na *L* to $L=\dfrac{q}{\beta}$

$$TC = r\frac{q}{\alpha} + w\frac{q}{\beta}$$

Produkcja w wielu zakładach

- Firma posiada dwie fabryki, w każdej inna funkcja kosztów:

$$TC_1 = f_1(q_1) \qquad TC_2 = f_2(q_2)$$

- Firma chce wyprodukować łącznie $q = q_1 + q_2$ jednostek
- Minimalizuje łączne koszty: $TC = TC_1(q_1) + TC_2(q_2)$
- Przy ograniczeniu: $q_1 + q_2 = q$
- Funkcja Lagrange'a: $\mathscr{L}(q_1, q_2, \lambda) = TC_1(q_1) + TC_2(q_2) - \lambda(q_1 + q_2 - q)$
- Warunki pierwszego rzędu:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_1} = \dfrac{\partial TC_1(q_1)}{\partial q_1} - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow & MC_1 = \lambda \\[2ex] \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_2} = \dfrac{\partial TC_2(q_2)}{\partial q_2} - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow & MC_2 = \lambda \end{array}\right\} \quad MC_1 = MC_2$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = q_1 + q_2 - q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 + q_2 = q$$

Produkcja w wielu zakładach

- Gdy rozwiązanie wewnętrzne: jeśli firma produkuje w wielu zakładach i *MC* rosnącymi funkcjami wielkości produkcji to rozkłada produkcję tak, żeby krańcowe koszty w każdym były równe
- Wyprodukowanie ostatniej jednostki kosztuje tyle samo w każdym zakładzie.
- W przeciwnym przypadku, np: $MC_1 > MC_2$
  - Ostatnia jednostka tańsza w 2 niż w 1 zakładzie, więc opłaca się przenieść produkcję ostatniej jednostki z 1 do 2 zakładu.
  - *MC* rosnące po *q*, więc MC_1 zmaleje, MC_2 wzrośnie
  - itd. dopóki $MC_1 > MC_2$ – opłaca się przestać dopiero gdy $MC_1 = MC_2$

Produkcja w wielu zakładach

- Uwaga – możliwe rozwiązania brzegowe:
  - Np. jeśli w 2 zakładach istnieją koszty quasi-stałe (stałe, ale nie są ponoszone, jeśli produkcja w tym zakładzie = 0)
    - Może być opłacalne produkowanie wszystkiego w jednym zakładzie i nieponoszenie kosztów stałych drugiego
  - Np. jeśli koszt krańcowy w obu fabrykach stały i w jednej zawsze niższy niż w drugiej

Produkcja w wielu zakładach

- Przykład 1

$$\begin{cases} TC_1(q_1) = 10q_1^3 + 5q_1^2 + q_1 + 10 & \text{dla } q_1 > 0 \\ TC_1(q_1) = 0 & \text{dla } q_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} TC_2(q_2) = 5q_2^3 + 7q_2^2 + q_2 + 10^6 & \text{dla } q_2 > 0 \\ TC_2(q_2) = 0 & \text{dla } q_2 = 0 \end{cases}$$

- Czy opłaca się produkować w obu zakładach, rozkładając koszty tak, żeby $MC_1 = MC_2$, czy wszystko wyprodukować tylko w jednym?
- To zależy od wielkości produkcji …

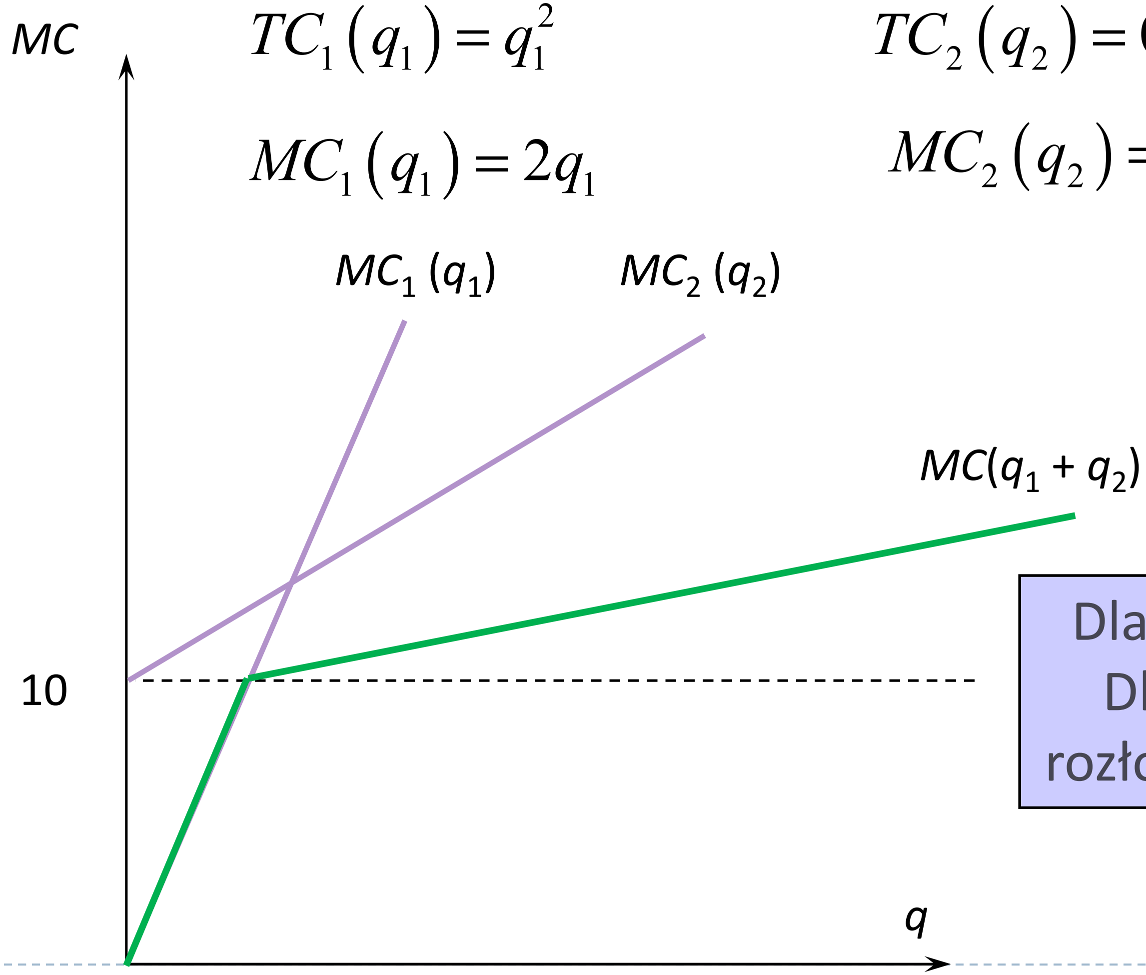
  (jeśli koszt krańcowy w 1 przewyższy koszt produkcji pierwszej jednostki w 2 zakładzie, opłaca się otworzyć oba)

Produkcja w wielu zakładach

- Przykład 2

$$TC_1(q_1) = q_1^2 \qquad TC_2(q_2) = 0,5q_2^2 + 10q_2$$

$$MC_1(q_1) = 2q_1 \qquad MC_2(q_2) = q_2 + 10$$



Dla $q < 5$ tylko jeden zakład
Dla $q \geq 5$ oba i produkcja rozłożona tak, aby $MC_1 = MC_2$

Quiz

- Prawda czy fałsz:
  1. Jeśli ceny czynników produkcji są stałe, izokoszta jest prostą
  2. Jeśli izokwanta jest ściśle wypukła, minimalizujące koszty produkcji ilości czynników spełniają zależność $MRTS_{LK} = - w/r$
  3. Jeśli na osi poziomej jest L, a na osi pionowej K – nachylenie izokoszty to $- w/r$
  4. Dla funkcji produkcji typu Cobba-Douglasa minimalizujące koszty rozwiązanie zawsze jest wewnętrzne
  5. Popyt warunkowy to funkcja mówiąca ile powinno się zatrudnić czynnika produkcji w zależności od produkowanej ilości oraz cen czynników
  6. Optymalnie rozłożona produkcja między wiele zakładów oznacza, że krańcowe koszty w każdym zakładzie muszą być równe
  7. Dla czynników doskonale komplementarnych, zmiana ich cen nie powoduje zmiany popytu na nie
  8. Dla czynników doskonale substytucyjnych, zmiana ich cen nie powoduje zmiany popytu na nie

Literatura

- V: 20, 21

- P: 7