Mikroekonometria
7

Mikołaj Czajkowski
Wiktor Budziński

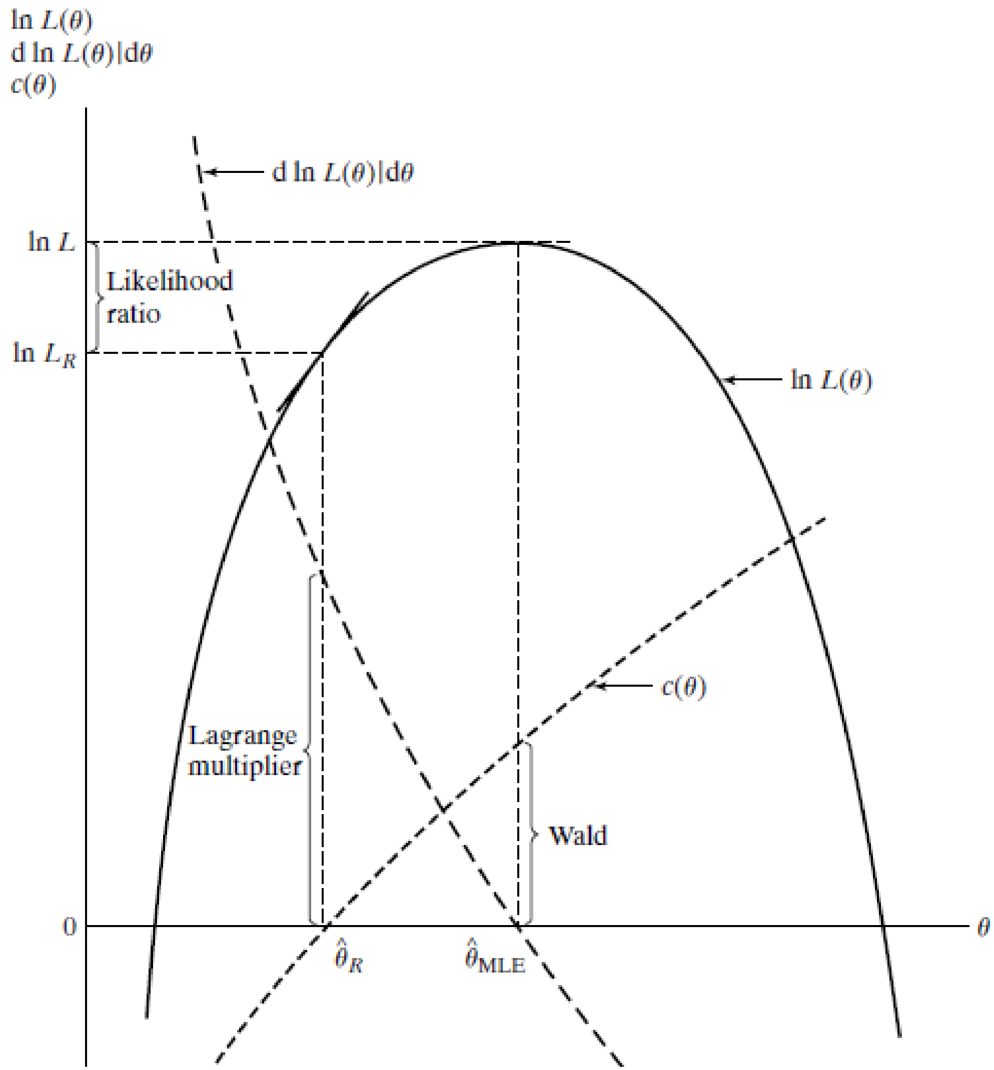
Testowanie hipotez

- 3 podstawowe testy
  - Przedział ufności
    - Parametry mają asymptotyczny rozkład normalny
    - Znamy błąd standardowy
    - Czy parametr jest statystycznie różny od *k* (np. od 0)?
  - Test LR – iloraz wartości funkcji największej wiarygodności
    - Czy restrykcja prowadzi do istotnego pogorszenia LL?
  - Test Walda
    - Czy estymator z restrykcjami nadal jest statystycznie istotny?

Hipotezy proste, a hipotezy złożone

- Hipotezą prostą nazywamy hipotezę w postaci np.: $H_0^1 : \beta_1 = 0$
- Hipotezą złożoną natomiast: $H_0^1 : \beta_1 = 0,\ H_0^2 : \beta_2 = 0,\ \ldots,\ H_0^K : \beta_K = 0$
- Testowanie osobno kilku hipotez prostych nie jest równoważne testowaniu jednej hipotezy złożonej
- Rozważmy prosty przypadek, kiedy statystyki testowe dla hipotez prostych są od siebie niezależne. Jeśli poziom istotności (p-stwo popełnienia błędu I rodzaju) jest równe α dla każdej z hipotez prostych to dla hipotezy złożonej wynosi ono: $\alpha^* = 1 - (1-\alpha)^K \to 1$
- Różnicę $\alpha^* - \alpha$ nazywa się obciążeniem Lovella
- Dlatego lepiej opierać wybór modelu o hipotezy złożone

Testowanie hipotez



Istotność parametrów

- Istotność parametrów

$$z = \frac{\left|\hat{\beta} - \beta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}}$$

  - Błędy standardowe z AVC
  - Wartość krytyczna z rozkładu standardowego normalnego
    - A nie t-studenta jak w regresji liniowej i MNK
  - H_0: Parametr = β_0
    - Duże wartości absolutne statystyki *z* (małe p-value) => parametr jest istotnie różny od β_0 (np. od 0) na zadanym poziomie istotności
  - W STATA – wyniki podawane automatycznie po estymacji dla każdego parametru

Test LR

- LR test
  - LR – *likelihood ratio*
  - Iloraz wartości funkcji największej wiarygodności

$$LR = -2\left(\ln \hat{L}_R - \ln \hat{L}_U\right)$$

  - Nakładamy jakieś restrykcje na parametry
    - *R* i *U* – *restricted*, *unrestricted* (test tylko dla modeli zagnieżdżonych)
    - Model z restrykcjami zawsze jest nie lepszy niż model bez restrykcji, a więc LR > 0
  - Wartość krytyczna z rozkładu chi-kwadrat z liczbą stopni swobody równą liczbie restrykcji (w formie równań)
  - H_0: Restrykcje nie pogarszają istotnie modelu
    - Duże wartości statystyki LR (małe p-value) – odrzucamy restrykcje (bo istotnie pogarszają model)
  - Wymaga estymacji modelu bez i z ograniczeniami

Zadanie 1. Eko-jabłka

1. Czy każdy parametr jest istotny na poziomie 5%? 1%?
2. Czy wszystkie parametry łącznie są istotne?
3. Porównaj twój wynik z tym raportowanym przez STATA po estymacji

- Można zastosować do dowolnych <u>zagnieżdżonych</u> modeli
- Podobny do testu F z regresji liniowej

Test Walda

- Test Walda
  - Idea: jeśli $\mathbf{X} \sim MVN_J(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ to $(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_J$
    - Jeśli $E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}$ to wyrażenie ma rozkład chi-kwadrat z J stopniami swobody
    - Jeśli $E(\mathbf{X}) \neq \boldsymbol{\mu}$ to wyrażenie ma niecentralny rozkład chi-kwadrat
      - Leży na prawo => daje większe wartości statystyki
  - Dla zbioru restrykcji H_0: $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{q}$
    - Jeśli są prawdziwe, to $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ powinien je spełniać
    - Jeśli nie, to $\mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{q}$ będzie dalej od $\mathbf{0}$
  - Statystyka testu Walda

$$W = \left(\mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{q}\right)' \left(AVC\left(\mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{q}\right)\right)^{-1} \left(\mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{q}\right) \sim \chi^2_J$$

Test Walda

- Intuicyjnie – czy estymator z restrykcjami nadal jest statystycznie istotny?
- H_0: Restrykcje nie pogarszają istotnie modelu
  - Duże wartości statystyki W (małe p-value) – odrzucamy restrykcje (bo istotnie pogarszają model)
- Nie wymaga estymacji modelu z ograniczeniami
  - Choć trzeba wyznaczyć AVC dla estymatora z restrykcjami

$$\hat{AVC}\left(\mathbf{c}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)-\mathbf{q}\right)=\frac{\partial \mathbf{c}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}'}\hat{AVC}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{c}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}'}\right)'$$

- Działa dla nieliniowych restrykcji
  - Dla liniowych $\mathbf{R}'\boldsymbol{\theta}=\mathbf{q}$ prościej

$$W=\left(\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\theta}}-\mathbf{q}\right)'\left(\mathbf{R}'AVC\left[\hat{\boldsymbol{\theta}}\right]\mathbf{R}\right)^{-1}\left(\mathbf{R}'\hat{\boldsymbol{\theta}}-\mathbf{q}\right)$$

Test Walda

- Jeśli $\mathbf{c}(\hat{\boldsymbol{\theta}})=\mathbf{q}$ jest pojedynczą restrykcją – test Walda działa tak samo jak statystyka *z* i test przedziału ufności

$$H_0: \theta = \theta_0 \qquad H_1: \theta \neq \theta_0$$

$$W = \left(\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)-0\right) AVC\left(\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)-0\right)^{-1}\left(\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)-0\right) = \frac{\left(\hat{\theta}-\theta_0\right)^2}{AVC\left(\hat{\theta}\right)} = z^2 \qquad z = \frac{\left|\hat{\theta}-\theta_0\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}}$$

  - Statystyka *W* ma rozkład chi-kwadrat z 1 stopniem swobody, czyli rozkład kwadratu statystyki standardowej normalnej

- Wada: test nie jest niewrażliwy na sformułowanie restrykcji
  - Np. dla przetestowania, czy $\beta/(1-\gamma)=q$ jest równe *q* można testować $\beta/(1-\gamma)-q=0$ lub $\beta-q(1-\gamma)=0$ – mają różne AVC
- Zaleta: nie wymaga dodatkowych założeń o rozkładach (jak statystyki LR i LM)

Zadanie 1. Eko-jabłka c.d.

4. Czy ceny zwykłych jabłek i eko-jabłek mają tę samą siłę oddziaływania (choć w przeciwną stronę)?
5. Czy cena eko-jabłek ma inny wpływ na mężczyzn niż na kobiety?

- Zbadaj wykorzystując test LR
- Zbadaj wykorzystując test Walda
  - Wymaga wymuszenia równości lub określonej wartości parametrów w STATA

Testowanie hipotez – zastosowania
Homogeniczność podprób

- Testowanie homogeniczności podprób

$$\chi^2 = 2\left(\sum_{n=1}^{\text{liczba grup}} LL_n - LL_{\text{cała próba}}\right)$$

  - Statystyka testu ma rozkład chi-kwadrat z liczbą stopni swobody równą (liczbie parametrów) * (liczbie grup – 1)
  - To samo można uzyskać dodając do modelu interakcje parametrów ze zmiennymi binarnymi dla grup i testując ich łączną istotność (np. wykorzystując test LR lub Walda)

6. Sprawdź, czy mężczyźni mają inne preferencje niż kobiety, jeśli chodzi o decyzje dotyczące zakupu eko-jabłek

Niepoprawność założeń modelu binarnego – skutki

- W modelach regresji liniowej: $y = \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X} + \boldsymbol{\gamma}'\mathbf{Z} + \varepsilon$
  - Pominięte zmienne (**Z**) – o ile **X** i **Z** nie są ortogonalne, lub $\boldsymbol{\gamma} = 0$ – estymator **β** jest obciążony
  - Heteroskedastyczność – o ile *ε* nie jest homoskedastyczny (wariancja składnika losowego nie jest równa dla różnych obserwacji) – estymator OLS jest nadal nieobciążony i zgodny, ale jest nieefektywny
- W modelach binarnych
  - Pominięte zmienne – nawet jeśli pominięte zmienne są nieskorelowane z tymi uwzględnionymi w modelu – estymator ML nie jest zgodny
  - Heteroskedastyczność – estymator ML nie jest zgodny
    - A to duży problem, bo dane mikro często są heteroskedastyczne

Niepoprawność założeń modelu binarnego

- Analogicznie jak w regresji liniowej można testować poprawność formy funkcyjnej
  - Test zamiast RESET nazywa się LINKTEST
  - Estymujemy model: $y^* = \mathbf{X\beta} + \varepsilon$
  - Liczymy wartości dopasowane: $\hat{y} = \mathbf{X\hat{\beta}}$
  - Liczymy regresję pomocniczą: $y^* = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{y} + \alpha_2 \hat{y}^2 + \alpha_3 \hat{y}^3 + \ldots + \varepsilon$
  - Testujemy łączną istotność $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$

7. Sprawdź poprawność formy funkcyjnej analizowanego modelu logistycznego
   1. Wykorzystaj polecenie wbudowane w STATĘ
   2. Policz 'na piechotę'

Niepoprawność założeń modelu binarnego

- Heteroskedastyczność można analizować analogicznie jak w przypadku modelu regresji liniowej
  - Wcześniej używaliśmy modelu ARCH
  - Tutaj możemy wykorzystać probit z heteroskedastycznością
  - Liczymy model: $y_i^* = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \sigma_i\varepsilon$
  - Wcześniej zakładaliśmy, że $\forall_i \ \sigma_i = 1$
  - Teraz $\sigma_i = \exp(\mathbf{Z}_i\boldsymbol{\alpha})$

8. Sprawdź czy w analizowanym modelu występuje dająca się objaśnić heteroskedastyczność

Praca domowa ME.7

1. Wykorzystaj zbiór danych *me.usahealth.dta* i zbuduj model binarny, w którym zmienną objaśnianą będzie to czy respondent poniósł jakiekolwiek wydatki medyczne (med > 0).
2. Przetestuj wybrane przez siebie hipotezy stosując następujące testy :
   - Test przedziału ufności
   - LR test (proszę nie testować tutaj łącznej istotności zmiennych w modelu)
   - Test Walda
   - Przetestuj homogeniczność podprób
   - Linktest
   - Testowanie heteroskedastyczności
3. Zinterpretuj uzyskane wyniki
   - Testy nie powinny dotyczyć „losowych" hipotez

```
set seed 10+"Nr indeksu"
sample 90, by(coins)
```

- Do przygotowania w grupach dwuosobowych